



Universidade de Brasília
Faculdade de Tecnologia
Departamento de Engenharia Mecânica

Aplicação do Método dos Elementos de Contorno ao escoamento de Gotas em Canais Convergentes

Por,
Lucas Hildebrand Pires da Cunha

Brasília
Junho de 2016

Lucas Hildebrand Pires da Cunha

Aplicação do Método dos Elementos de Contorno ao Escoamento de Gotas em Canais Convergentes

Trabalho submetido ao Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade de Brasília como requisito parcial para obtenção do Título de Bacharel em Engenharia Mecânica.

Universidade de Brasília
Faculdade de Tecnologia

Orientador: Prof. Éder Lima de Albuquerque, PhD.

Brasília
Junho de 2016

Lucas Hildebrand Pires da Cunha

Aplicação do Método dos Elementos de Contorno ao Escoamento de Gotas em Canais Convergentes. Lucas Hildebrand Pires da Cunha. – Brasília, Junho de 2016.

66 p. : il. (algumas color.) ; 297 mm.

Orientador: Prof. Éder Lima de Albuquerque, PhD.

Projeto de Graduação – Universidade de Brasília
Faculdade de Tecnologia – Junho de 2016.

1. Emulsões. 2. Gota plana. 3. Meios porosos. 4. Método dos Elementos de Contorno. Aplicação do Método dos Elementos de Contorno ao Escoamento de Gotas em Canais Convergentes. ENM/FT – UnB/DF, Brasil.

Lucas Hildebrand Pires da Cunha

Aplicação do Método dos Elementos de Contorno ao Escoamento de Gotas em Canais Convergentes

Trabalho submetido ao Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade de Brasília como requisito parcial para obtenção do Título de Bacharel em Engenharia Mecânica.

Banca Examinadora

Prof. Éder Lima de Albuquerque, PhD. – UnB/DF
Orientador

Prof. Rafael Gabler Gontijo, PhD. – UnB/DF
Examinador 1

Ivan Rosa de Siqueira, ScM. – PUC-Rio
Examinador 2

Brasília, 29 de junho de 2016.

Dedico este trabalho aos meus pais, Vera e Divaldo, aos meus irmãos, Cássio e Vitor, aos meus sobrinhos Marina e Caetano, a minha namorada Flavie e aos meus amigos.

Agradecimentos

Ao professor Éder, que mesmo em meio a muito trabalho, aceitou a tarefa de me orientar neste projeto e não mediu esforços para que esse trabalho pudesse se concretizar. Eu não o conhecia muito bem até então, mas você me impressionou muito durante esse semestre, contribuindo muito para minha formação e me ajudando em questões pessoais, inclusive. Eu não poderia ter escolhido melhor orientador para fechar esse curso com chave de ouro. Espero ter a oportunidade de trabalhar com você no futuro.

Ao professor Taygoara, o melhor professor que já passou pela minha vida. Minha graduação não seria a mesma se não tivesse sido seu aluno. Já se foram quatro disciplinas e uma monitoria nas quais estive com você, mas ainda não tivemos a oportunidade de trabalharmos juntos em algo mais sério. Espero que o futuro reserve boas oportunidades para nós; afinal, você foi o maior responsável por eu ter me interessado pela vida acadêmica.

Aos meus pais, Vera e Divaldo, por tudo o que fizeram por mim e por todo o carinho, amor e atenção que me deram. Nós sabemos que não foi fácil me criar. Mesmo tendo sido o motivo de muitos cabelos brancos, vocês nunca desistiram de mim, e sempre me incentivaram para que eu fosse um homem de bem e feliz, e me apoiaram em cada momento e decisão sem nunca me recriminar. Saibam que tenho muitos arrependimentos por ser o motivo de momentos de tristeza e desgosto, mas vocês não desistiram e conseguiram me fazer seguir pelo caminho certo. Espero que esse trabalho simbolize todo investimento que vocês fizeram na minha formação profissional e pessoal. Se todos tivessem a mesma benção de, assim como eu, ter pais como vocês, o mundo não seria esse caos a que assistimos hoje.

Ao meu bom amigo Ivan, o primeiro veterano que conheci ao ingressar na faculdade e que, desde então, tem sido um grande companheiro de trabalho. Provavelmente uma das pessoas mais inteligentes que já passou pela minha vida, foi uma honra ter trabalhado e estudado tantas vezes ao seu lado. Nunca iremos esquecer a prova de 24 horas de duração do professor Taygoara movida à chá mate com coca-cola, né? Foi extremamente massante, mas virou uma boa história para a vida. Obrigado por todos os conselhos dados, mesmo que eu não tenha seguido a maioria deles, tenha certeza que sempre levei tudo que disse em consideração.

Aos meus irmãos, Cássio e Vitor, suas esposas, Maricí e Michelle, e aos meus amados sobrinhos, Marina e Caetano. Vocês são a minha base e, sem dúvidas, a família mais linda possível.

À minha namorada, Flavie, mulher que me deu todo o suporte durante o tempo em que escrevia esse trabalho, ouvindo muitos desabafos devido ao estresse proveniente de noites mal dormidas e dores de cabeça por conta de equações que não fechavam. A mulher que me deu amor, carinho e, acima de tudo, confiança. Você me faz ser uma pessoa melhor. Muito obrigado, meu amor. Je t'aime.

Aos meus grandes amigos – Giordanno, Guilherme, Luiz, Rodrigo e João Paulo – que compartilharam comigo essa caminhada tão difícil e admirável chamada engenharia. Só nós sabemos o quanto nos sacrificamos em prol não apenas das aprovações, mas da realização de bons trabalhos. Que carreguemos sempre ao longo dessa vida esse comprometimento em dar o melhor de si e não se contentar com resultados medianos. Sejam a mudança que queremos para o mundo.

Aos grandes amigos que a vida me deu – Kleniston, André, Luiz Gustavo, Rodrigo, Luan, Carlos, Carlinhos, Glawber, Daniel, Vinicius, João, Eduardo, Gabriel, entre tantos outros –, os quais contribuíram muito na minha formação como pessoa, me ajudando a superar momentos difíceis e mostrando como podemos ser felizes com muito pouco.

Aos excelentes professores que fizeram parte da minha formação acadêmica. Em especial, aos professores Vinicius Rispoli, Mendeli Vanstein, Gustavo Abade, Edgar Mamyia, Arthur Vicentini, José Alexander, Lucival Malcher, Antônio Henriques e outros aos quais serei eternamente grato por me fazerem acreditar que seguindo a carreira acadêmica posso trazer uma contribuição significativa e concreta para a sociedade. Agradeço ainda por terem me roubado muitas noites de sono em prol da excelência.

Aos demais professores, colegas e funcionários da Universidade de Brasília, principalmente do Departamento de Engenharia Mecânica, sem os quais esse trabalho não poderia ser realizado.

Resumo

O presente trabalho trata do escoamento de emulsões em meios porosos, sendo motivado pelos grandes avanços em processos de recuperação avançada de óleo residual em poços produtores de petróleo. Do ponto de vista prático, mecanismos viscosos e capilares fazem com que o escoamento da emulsão exija uma maior diferença de pressão em relação ao escoamento de um fluido Newtoniano para que a vazão seja mantida constante. Por sua vez, esse aumento da pressão de bombeamento é capaz de recuperar óleo aprisionado em gânglios de poros vizinhos. O modelo considera um escoamento bidimensional de uma gota plana através de um canal convergente que representa a constrição do meio poroso, podendo fornecer resultados qualitativos importantes. Como as dimensões da gota são da mesma ordem de grandeza do meio poroso, a emulsão é tratada como uma mistura bifásica de fluidos viscosos e imiscíveis. Partindo de uma análise adimensional baseada em escalas características típicas do problema, o escoamento é considerado livre de inércia, sendo governado pelas equações de Stokes. A forma integral do campo de velocidade em regimes de Stokes é desenvolvida e apresentada usando a condição de continuidade da velocidade e salto de tensões na interface entre os fluidos. Esse sistema de equações integrais é adimensionalizado, sendo os principais parâmetros do problema o número de capilaridade, a relação entre as geometrias da gota e do canal, e a razão entre as viscosidades dos fluidos. A metodologia para implementação do Método dos Elementos de Contorno também é discutida com riqueza de detalhes. Consideramos um procedimento de validação do código numérico desenvolvido a partir da comparação de resultados preliminares com previsões teóricas típicas da literatura de mecânica dos fluidos. Com o método validado, fez-se a implementação dos termos relacionados ao salto de tensões na interface dos fluidos e do método para a evolução da gota. A partir do novo código, foi realizado um estudo de convergência dos resultados em função da malha e do passo de tempo. Foi constatado que a quantidade de elementos (discretização da malha) tem fortes influências no erro associado à vazão na saída do canal. O uso de um fator de concentração de elementos, Ne , igual a 7, foi o suficiente para alcançar erros na vazão próximos 1,5%. Com relação ao passo de tempo, verifica-se que este influencia de forma relevante na estabilidade das simulações. A utilização de um passo de tempo igual a 0,01 foi o suficiente para obter erros na área da gota inferiores a 0,5%. Determinado os parâmetros de simulação Ne e Δt , simulações variando o número de capilaridade, a razão de viscosidade e o tamanho, foram realizadas para estudar a influência desses nos formatos apresentados pela gota e as respostas obtidas na pressão de bombeamento para manter uma vazão fixa. Dos resultados, foi concluído que: menores números de capilaridade fazem a gota manter seu formato mais arredondado e influenciam linearmente o aumento da pressão de bombeamento; para maiores razões de viscosidade, λ , a gota apresenta uma maior resistência à deformação, e a pressão de bombeamento se relaciona positivamente em uma relação linear com aumento de λ ; por fim, maiores diâmetros de gotas resultam em maiores deformações da mesma para que possa passar pela constrição, e também apresentam maiores valores obtidos para a pressão de bombeamento, mas dessa vez a relação é quadrática.

Palavras-chaves: emulsões; gota plana; meios porosos; Método dos Elementos de Contorno.

Abstract

Motivated by the great progress in advanced residual oil recovery processes on petroleum reservoir, this work deals with the flow of emulsion in porous media. In the practical point of view, there are viscous and capillary mechanisms that make the flow of the emulsion require a greater pressure gradient comparing to the Newtonian fluid flow, to maintain the same flow rate. On the other hand, this increase in the pumping pressure is capable to recover the confined oil in ganglia from neighbor pores. The model considers a two-dimensional flow of a planar drop through a converging channel representing the constriction of a porous media and can provide important qualitative results. Due the fact that the dimensions of the drop have the same order of magnitude of the porous media, the emulsion is treated as a biphasic mix of two viscous and immiscible fluids. Using a dimensionless analysis based on characteristics scales of the problem, the flow is considered free from inertia and thereby it is governed by the Stokes' equations. The integral form of Stokes' equations is developed and shown using the conditions of continuity velocity and stress jump on the fluid interface. In this way, a formulation based on line integrals over the drop and the channel boundaries relating the velocity and tension fields for both fluids are obtained. Finally, the system of integral equations is put on a dimensionless form, where the main parameters are the capillarity number and the aspect ratio between drop and channel geometries. The Boundary Element Method (BEM) implementation methodology is also described in detail. Finally, a procedure to validate the numerical code developed comparing the results obtained with the literature. In this sense, the code based on the Boundary Element Method shows itself as a good tool to study the problem proposed in this project. After the method validation, it were implemented the terms related to the stress jump on the fluid interface and the method to do the drop evolution. Using the new code, studies about the errors and convergence related to the method in function of the mesh and time step were done. It was concluded that the number of elements on the boundaries has strong influence on the errors related to the flow rate at the outlet section. The use of a element concentration factor, Ne , equal to 7, was enough to reach flow rate error around 1.5%. About the time step, it was verify a relevant influence on the simulation stability. A time step equal to 0.01, is enough to reach area errors smaller than 0.5%. Using these parameters to Ne and Δt , simulations for different capillarity number, viscosity ratio and drop diameters, were done to study how they affect the drop geometry and driver pressure during the flow, for a fixed flow rate. From the results, it was concluded: smaller capillarity numbers, Ca , makes the drop geometry rounder through the channel and increases driver pressure ($1/Ca \Delta P$); bigger viscosity ratios, λ , makes the drop more deformation resistance and increase the driver pressure in a linear way; lastly, bigger diameters results in bigger deformations allowing the drop to pass through the convergence, and it increase the driver pressure in a quadratic way.

Key-words: emulsion; planar drop; porous media; Boundary Element Method.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Motivação para o estudo proposto	1
1.2	Revisão bibliográfica	2
1.3	Objetivos	5
1.4	Organização do trabalho	6
2	Modelagem matemática	7
2.1	Equações de balanço	7
2.2	Contexto físico do modelo	9
2.3	Equações de Stokes	11
2.4	Teorema da Reciprocidade de Lorentz	13
2.5	Solução fundamental do escoamento de Stokes	14
2.6	Representação integral do escoamento de Stokes	18
2.7	Representação integral do escoamento na superfície de uma gota	19
2.8	Forma adimensional da representação integral	21
3	Metodologia numérica	24
3.1	Visão geral do método	24
3.2	Geração da malha	26
3.3	Ponto de vista elementar	27
3.4	Elementos geométricos do contorno	29
3.5	Discretização das equações integrais no contorno	30
3.6	Integração numérica	33
3.7	Condições de contorno	34
3.8	Evolução da superfície da gota	35
3.9	Cálculo da vazão e área da gota	36
4	Validação do método	37
4.1	Escoamento entre placas paralelas	37
4.2	Escoamento em torno de um cilindro	40
4.3	Escoamento gerado pela rotação de um cilindro	41
5	Resultados e discussões	43
5.1	Geometria do problema	43
5.2	Testes de convergência da malha	44
5.3	Estabilidade do método em relação ao passo de tempo	46

5.4	Efeito do número de capilaridade	48
5.5	Efeitos da razão de viscosidade	54
5.6	Efeito do diâmetro inicial da gota	56
6	Conclusões e trabalhos futuros	60
6.1	Conclusões preliminares	60
6.2	Trabalhos futuros	62
	Referências	63

Lista de ilustrações

Figura 1	– Representação de uma gota plana dispersa em outro fluido imiscível escoando por um canal convergente. A gota é composta pelo fluido i e a fase contínua é composta pelo fluido o . Cada fluido ocupa uma região Ω limitada pelo contorno Γ	9
Figura 2	– Representação genérica de uma gota plana (fluido i) imersa em outro fluido imiscível (fluido o) em um domínio fechado.	19
Figura 3	– Uma região plana Ω e seu contorno Γ aproximado por N elementos de contorno Γ_k	25
Figura 4	– Representação da discretização espacial do contorno no domínio computacional.	26
Figura 5	– Elemento de contorno quadrático contínuo com detalhes da representação nos sistemas de coordenadas global e local.	27
Figura 6	– Funções de forma quadráticas contínuas $N_1(\xi)$, $N_2(\xi)$ e $N_3(\xi)$ em cada elemento.	28
Figura 7	– Representação esquemática das condições de contorno utilizadas no problema.	34
Figura 8	– Perfil de velocidade ao longo do escoamento entre placas planas e paralelas causado por gradiente de pressão.	38
Figura 9	– Resultados para o escoamento entre placas planas e paralelas causado por gradiente de pressão. Em (a), o desvio cometido no cálculo da vazão na seção de saída em função do refinamento da malha; em (b), o custo computacional das simulações em função do refinamento da malha.	38
Figura 10	– Resultados para o campo de pressão no escoamento entre placas planas e paralelas causado por gradiente de pressão. Em (a), queda de pressão desde a seção de entrada até a seção de saída; em (b), mapa de cor do campo de pressão.	39
Figura 11	– Resultados para o escoamento em torno de um cilindro. Em (a), o campo de velocidade; em (b), o mapa de cor do campo de pressão.	40
Figura 12	– Campo de velocidade do escoamento gerado por um cilindro girando em um fluido em repouso.	41
Figura 13	– Esquema da geometria do problema, explicitando os 10 segmentos que definem o contorno do canal e da gota.	43
Figura 14	– Erro numérico cometido no cálculo da vazão em função do refinamento da malha.	44
Figura 15	– Erro numérico cometido no cálculo da área da gota em função do refinamento da malha.	45

Figura 16	– Pressão de bombeamento no escoamento em função do refinamento da malha.	45
Figura 17	– Erro numérico cometido no cálculo da vazão em função do passo de tempo.	47
Figura 18	– Erro numérico cometido no cálculo da área da gota em função do passo de tempo.	47
Figura 19	– Pressão de bombeamento no escoamento em função do passo de tempo.	48
Figura 20	– Fotos da gota escoando pelo canal em 5 diferentes momentos, para $Ca = 1$ e $\lambda = 30$.	49
Figura 21	– Fotos da gota escoando pelo canal em 5 diferentes momentos, para $Ca = 0,25$ e $\lambda = 30$.	49
Figura 22	– Fotos da gota escoando pelo canal em 5 diferentes momentos, para $Ca = 0,0625$ e $\lambda = 30$.	49
Figura 23	– Fotos da gota escoando pelo canal em 5 diferentes momentos, para $Ca = 1$ e $\lambda = 20$.	50
Figura 24	– Fotos da gota escoando pelo canal em 5 diferentes momentos, para $Ca = 0,25$ e $\lambda = 20$.	50
Figura 25	– Fotos da gota escoando pelo canal em 5 diferentes momentos, para $Ca = 0,0625$ e $\lambda = 20$.	50
Figura 26	– Fotos da gota escoando pelo canal em 5 diferentes momentos, para $Ca = 1$ e $\lambda = 10$.	51
Figura 27	– Fotos da gota escoando pelo canal em 5 diferentes momentos, para $Ca = 0,25$ e $\lambda = 10$.	51
Figura 28	– Fotos da gota escoando pelo canal em 5 diferentes momentos, para $Ca = 0,0625$ e $\lambda = 10$.	51
Figura 29	– Descontinuidades na superfície da gota após altas deformações para $Ca = 0,25$ e $\lambda = 10$.	52
Figura 30	– Pressão de bombeamento no escoamento em função do número de capilaridade para $\lambda = 10$.	53
Figura 31	– Pressão de bombeamento no escoamento em função do número de capilaridade para $\lambda = 20$.	53
Figura 32	– Pressão de bombeamento no escoamento para $\lambda = 30$ e diferentes números de capilaridade.	54
Figura 33	– Pressão de bombeamento em $x_1 = 0,59$ em função de Ca^{-1} para diferentes razões de viscosidade.	54
Figura 34	– Formatos da gota em um mesmo instante. Da esquerda para direita, $\lambda = 10, 15, 20, 30$ e 40 respectivamente.	55
Figura 35	– Pressão de bombeamento em função de λ , para $Ca = 0,25$.	55
Figura 36	– Pressão de bombeamento para a posição da gota em aproximadamente $0,59$ em função de λ , para $Ca = 0,25$.	56

Figura 37	– Formas apresentadas pela gota em diferentes momentos para $a = 0,70$, utilizando $Ca = 0,25$ e $\lambda = 10$	56
Figura 38	– Formas apresentadas pela gota em diferentes momentos para $a = 0,60$, utilizando $Ca = 0,25$ e $\lambda = 10$	57
Figura 39	– Formas apresentadas pela gota em diferentes momentos para $a = 0,50$, utilizando $Ca = 0,25$ e $\lambda = 10$	57
Figura 40	– Formas apresentadas pela gota em diferentes momentos para $a = 0,40$, utilizando $Ca = 0,25$ e $\lambda = 10$	57
Figura 41	– Formas apresentadas pela gota em diferentes momentos para $a = 0,30$, utilizando $Ca = 0,25$ e $\lambda = 10$	58
Figura 42	– Pressão de bombeamento em função da posição relativa a gota dentro do canal, utilizando $Ca = 0,25$ e $\lambda = 10$ para diferentes tamanhos de raio inicial da gota.	58
Figura 43	– Pressão de bombeamento máxima obtida em função do raio da gota, para $Ca = 0,25$ e $\lambda = 10$	59

Lista de símbolos

Símbolos latinos

a	Diâmetro da gota não deformada
A	Área da seção transversal do plano de entrada
\boldsymbol{a}	Função arbitrária utilizada para nas propriedades da transformada de Fourier
\boldsymbol{B}	Vetor com os coeficientes relativos a salto de tensões na superfície da gota no contexto do MEC
c	Constante associada a integração da função delta de Dirac no contorno
\boldsymbol{D}	Tensor taxa de deformação
\mathcal{D}	Coeficiente de difusão de Stokes-Einstein
\boldsymbol{e}_i	Vetores da base canônica ($i = 1, 2, 3$)
f	Função escalar, vetorial ou tensorial arbitrária no espaço físico
\hat{f}	Função escalar, vetorial ou tensorial arbitrária no espaço de Fourier
\boldsymbol{f}	Força de campo por unidade de área
\boldsymbol{F}	Intensidade de um monopolo
\mathfrak{F}	Transformada de Fourier
g	Magnitude da aceleração da gravidade
\boldsymbol{g}	Força de campo por unidade de volume
G	Negativo do gradiente de pressão
\mathcal{G}	Matriz com os coeficientes relativos a tensão no contexto do MEC
h	Altura da saída do canal
H	Altura da entrada do canal
\boldsymbol{H}	Matriz com os coeficientes relativos a velocidade no contexto do MEC
i	Unidade imaginária
\boldsymbol{I}	Tensor identidade

J	Jacobiano da transformação de coordenadas
\mathcal{J}	Propagador do distúrbio de velocidade
k	Constante de Boltzmann; magnitude do vetor numero de onda
\mathbf{k}	Vetor número de onda
\mathcal{K}	Propagador de distúrbio de tensão
L	Comprimento do canal
$\hat{\mathbf{n}}$	Vetor normal unitário exterior ao contorno
N	Quantidade de elementos de contorno em que um contorno genérico é dividido
N_e	Fator de concentração de elementos
N_i	Funções de forma quadráticas contínuas ($i = 1, 2, 3$)
N_s	Quantidade de elementos de contorno em cada segmento inicial do contorno externo do canal
\mathbf{N}	Matriz com as funções de forma
N_i	Quantidade de elementos de contorno no contorno da gota
N_o	Quantidade de elementos de contorno no contorno externo do canal
o	Fluido que compõe a fase contínua
p	Pressão termodinâmica
P	Pressão modificada
P_0	Pressão na seção de entrada do canal
P_L	Pressão na seção de saída do canal
p_c	Escala de pressão característica do escoamento
\hat{p}	Campo de pressão no espaço de Fourier
\mathcal{P}	Pressão mecânica
\mathcal{P}	Propagador do distúrbio de pressão
Q	Vazão do escoamento
\mathbf{r}	Vetor de posição relativa em relação a um ponto de referência

r	Magnitude do vetor de posição relativa
t	Tempo físico relativo ao escoamento
\mathbf{t}	Vetor tensão
\mathbf{t}_i	Vetor tensão na fase dispersa
\mathbf{t}_o	Vetor tensão na fase contínua
$\mathbf{t}_{(n)}$	Vetor com os valores nodais de tensão
$\hat{\mathbf{t}}$	Vetor tangente unitário
\mathbf{T}	Vetor com as tensões nos nós no contexto do MEC
T	Temperatura absoluta
\mathbf{u}	Vetor velocidade Euleriano
\mathbf{u}_i	Vetor velocidade do escoamento da fase dispersa
\mathbf{u}_o	Vetor velocidade do escoamento da fase contínuo
\mathbf{u}^q	Vetor de velocidades unitárias em uma dada direção q e zero na outra
$\mathbf{u}_{(n)}$	Vetor com os valores nodais da velocidade
$\hat{\mathbf{u}}$	Campo de velocidade velocidade no espaço de Fourier
U	Velocidade média do escoamento
\mathbf{U}	Vetor com as velocidade nos nós no contexto do MEC
x	Magnitude do vetor posição
x_i	Coordenada do vetor posição na direção i ($i = 1, 2, 3$)
\mathbf{x}	Vetor posição
\mathbf{x}_m	Ponto fonte sobre o contorno
\mathbf{x}_n	Ponto de controle sobre o contorno
$\mathbf{x}_{(n)}$	Vetor com os valores nodais da posição
\mathbf{x}_0	Ponto fonte sobre o contorno genérico

Símbolos gregos

Γ	Contorno de uma região plana
Γ_i	Contorno da gota
Γ_k	Elemento de contorno genérico
Γ_o	Contorno externo do canal
δ_{ij}	Operador Delta de Kronecker
$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$	Distribuição Delta de Dirac
$\Delta\Gamma_i$	Elemento de contorno no contorno da gota
$\Delta\Gamma_o$	Elemento de contorno no contorno externo do canal
$\Delta\rho$	Diferença entre as massas específicas dos fluidos
$\Delta\mathbf{f}$	Salto de tensões na interface entre os fluidos
Δt	Tamanho do passo de tempo da evolução da superfície
κ	Curvatura local
λ	Razão entre as viscosidades das fases dispersa e contínua
μ	Viscosidade dinâmica molecular da fase contínua
ν	Viscosidade cinemática molecular
ξ	Sistema de coordenada local adimensional
$\boldsymbol{\xi}$	Vetor vorticidade
ρ	Massa específica
ρ_i	Massa específica da fase dispersa
ρ_o	Massa específica da fase continua
σ	Coeficiente de tensão superficial
$\boldsymbol{\sigma}$	Tensor das tensões
$\boldsymbol{\sigma}_i$	Tensor de tensões da fase dispersa
$\boldsymbol{\sigma}_o$	Tensor das tensões da fase continua
τ_σ	Tempo característico de relaxação da gota

τ_{∞}	Tempo característico da escala convectiva
$\boldsymbol{\tau}$	Campo de extra-tensão
ϕ	Potencial escalar
ω	Módulo do vetor velocidade angular
$\boldsymbol{\omega}$	Velocidade angular do cilindro
Ω	Região no plano
Ω_i	Região do plano ocupada pela fase dispersa
Ω_o	Região do plano ocupada pela fase contínua
ω_c	Frequência de excitação característica do escoamento

Símbolos matemáticos

D/Dt	Operador derivada material
∇	Operador gradiente
$\nabla \cdot$	Operador divergente
$\nabla \times$	Operador rotacional
∇^2	Operador Laplaciano

Grupos adimensionais

Re	Número de Reynolds
Fr	Número de Froude
Sh	Número de Strouhal
Ca	Número de capilaridade

Siglas

CC	Condição de contorno
MIC	Método Integral de Contorno
MEC	Método dos Elementos de Contorno

O sofá é um péssimo vício, vai te acomodar.
Projota.

1 Introdução

1.1 Motivação para o estudo proposto

Uma emulsão é uma mistura bifásica de dois líquidos viscosos e imiscíveis em que um encontra-se disperso no outro na forma de gotas. Em geral, emulsões são formadas a partir de um processo de geração e ruptura de gotas em um par de fluidos, definindo, assim, uma fase dispersa (gotas) e outra contínua (fluido base). O estudo do comportamento mecânico e reológico de emulsões encontra fundamento na grande variedade e abrangência de suas aplicações. Informações detalhadas nesse contexto são de grande relevância em diferentes setores das indústrias farmacêutica e alimentícia, por exemplo (Barnes & Hutton, 1989; Macosko, 1994). Aplicações promissoras também vem sendo exploradas na área de biomedicina, tais como o transporte de fármacos pela corrente sanguínea através de emulsões magnéticas (Ahmad et al., 2013). A indústria do petróleo também manipula emulsões frequentemente, tanto no próprio processo de extração quanto no transporte de misturas de água e óleo em tubulações e dutos (Edwards et al., 1991; Sjöblom, 1992). Mais recentemente, a injeção de emulsões (e também de soluções poliméricas) em poços produtores tem sido muito utilizada em processos de recuperação avançada de óleo residual¹ (Alvarado & Manrique, 2010), sendo a principal motivação prática deste trabalho. Sob essa perspectiva, o escoamento das duas fases em reservatórios é investigado a partir do escoamento de emulsões em meios porosos modelados por capilares com constrições ou canais convergentes. Nesse caso, o maior interesse recai sobre o fator de redução de mobilidade, dado pela relação entre as quedas de pressão do escoamento apenas da fase contínua e da emulsão no meio poroso (para a mesma vazão volumétrica). Por um lado, a presença de gotas viscosas dispersas no fluido base aumenta a viscosidade efetiva do meio, o que requer maior gradiente de pressão para manter o escoamento. Por outro, os efeitos extensionais de deformação e alinhamento das gotas induzidos pela constrição do canal competem com a ação restauradora da tensão interfacial, o que também exige um aumento no gradiente de pressão para que a gota atravesse o canal. Sendo assim, para que a vazão permaneça constante e a emulsão escoe completamente pelo poro, é necessário aumentar a pressão de bombeamento. Esse aumento de pressão, por sua vez, é capaz de recuperar o óleo residual aprisionado em gânglios de poros vizinhos.

Em grande parte das aplicações práticas, as pequenas dimensões das gotas e sua quantidade no fluido base permitem que a mistura seja tratada como um fluido homogêneo

¹ Do inglês, *enhanced oil recovery*.

equivalente. Mesmo que ambas as fases sejam constituídas de materiais simples, como água e óleo, por exemplo, emulsões são tipicamente classificadas como fluidos não Newtonianos (Bird et al., 1987; Larson, 1999). De fato, emulsões podem apresentar comportamento não linear em diversos casos, como dependência da viscosidade em relação a taxa de cisalhamento e diferença de tensões normais. Todavia, os fundamentos físicos que explicam a existência desses fenômenos macroscópicos são consequências intrínsecas da dinâmica do escoamento na micro-escala, tais como deformação, alinhamento, coalescência e ruptura de gotas, por exemplo. Em outras aplicações, contudo, como é o caso específico da recuperação de óleo em meios porosos, o escoamento ainda deve ser tratado como bifásico. Nessa situação, as escalas de comprimento típicas em um meio poroso são da mesma ordem de grandeza da escala interna da emulsão, não permitindo que o escoamento seja tratado como se fosse de um meio contínuo equivalente. De toda forma, fica evidente a necessidade de estudar o comportamento mecânico microscópico de gotas de emulsões a fim de melhor compreender os diferentes fenômenos físicos associados a esse tipo material.

Atualmente, uma grande quantidade de trabalhos tem se dedicado ao estudo mecânico e reológico de emulsões², demonstrando o grande interesse no assunto motivado pelos diversos campos de aplicações. Todavia, ainda há uma série de desafios a serem vencidos. Os diversos fenômenos físicos que ocorrem no escoamento desse tipo de material dificultam a modelagem matemática em estudos teóricos nesse assunto. Tão desafiadoras quanto a formulação de novas teorias são as observações experimentais em laboratório. Em linhas gerais, é difícil realizar uma caracterização precisa em relação às propriedades termofísicas e microestruturais de emulsões, como viscosidade efetiva e polidispersidade de gotas. Além disso, fenômenos como migração de gotas induzida por interações hidrodinâmicas e/ou gradientes de taxa de cisalhamento em escoamentos não uniformes, coalescência e ruptura de gotas e movimento relativo de gotas sobre superfícies sólidas comprometem a validade dos resultados experimentais em nível microscópico. Sendo assim, simulações numéricas aliadas a um modelo teórico confiável podem fornecer boas predições nesse tipo de estudo.

1.2 Revisão bibliográfica

Estratégias numéricas para o estudo de emulsões são apresentadas em um número considerável de artigos na área. Grande parte deles utiliza o Método Integral de Contorno³ (doravante MIC), descrito por Ladyzheskaya (1969). Essa metodologia baseia-se em expressar as equações governantes do escoamento na escala das partículas (equações de Stokes⁴) em um formato integral, transformando o problema tridimensional do escoamento nas vizinhanças de

² Uma revisão pormenorizada é apresentada na Seção 1.2.

³ Do inglês, *Boundary Integral Method* ou BIM.

⁴ A formulação matemática para obtenção das equações de Stokes é descrita em detalhes no Capítulo 2.

uma gota em um problema bidimensional descrito por integrais de superfície. Assim, não há necessidade de discretizar todo o domínio do problema, o que representa um ganho significativo em termos de tempo computacional nas simulações. Dessa maneira, para esse tipo de abordagem, o MIC mostra-se bastante superior a outros métodos tipicamente usados em soluções numéricas de problemas de dinâmica dos fluidos, tais como o Método de Elementos Finitos, o Método de Volumes Finitos e o Método de Diferenças Finitas. Muitos pesquisadores dedicaram-se ao estudo de regimes de deformação e/ou condições de ruptura de gotas aplicando o MIC aos mais variados tipos de escoamentos (Pozrikidis, 1993; Kennedy et al., 1994; Cristini et al., 1998; Lee & Pozrikidis, 2006; Oliveira & Cunha, 2015). A interação e/ou colisão entre gotas, especialmente importante em regimes mais concentrados, também foi tema central de diversos trabalhos baseados no MIC (Loewenberg & Hinch, 1996, 1997; Zinchenko et al., 1999; Davis, 1999; Pournader & Mortazavi, 2013).

Embora a solução das equações de Stokes expressas em termos de integrais de superfície reduza a dimensão do problema, ainda há uma grande dificuldade associada a sua implementação numérica (Pozrikidis, 1992). Devido à existência de funções de Green singulares na formulação, a maioria das análises realiza grande esforço para que o cálculo das integrais seja o mais preciso possível. Nesse sentido, as técnicas mais comuns consistem em utilizar malhas extremamente refinadas para descrever os pontos materiais sobre a superfície das gotas e/ou adotar métodos numéricos de integração de alta ordem, especialmente nas vizinhanças do ponto de singularidade (Stone & Leal, 1989; Yon & Pozrikidis, 1999; Pozrikidis, 2001). Outro procedimento bastante difundido é realizar uma subtração parcial das singularidades localmente, permitindo que as integrais sejam avaliadas numericamente de forma mais acurada nas proximidades do pólo (Loewenberg & Hinch, 1996; Zinchenko et al., 1997; Davis, 1999; Cristini et al., 2001). Embora esses procedimentos sejam amplamente utilizados, nenhum deles fornece resultados satisfatórios quando as integrais são calculadas exatamente sobre a singularidade. De forma alternativa, pode-se implementar uma formulação equivalente baseada em integrais de linha (ainda em problemas tridimensionais) que permanece regular mesmo sobre a superfície que contém o ponto de singularidade, contanto que o caminho de integração não o contenha (Bazhlekova et al., 2004; Siqueira et al., 2015). Outro problema associado ao método, que é tipicamente Lagrangeano (visto que acompanha o movimento da gota no escoamento), está associado à distorção contínua da malha durante a simulação. Nesse caso, diversos autores abordam técnicas de relaxação dos pontos de controle sobre a superfície das gotas a fim de evitar instabilidades numéricas que possam comprometer os resultados obtidos (Tanzosh et al., 1999; Loewenberg & Hinch, 1996; Zinchenko et al., 1997; Siqueira et al., 2015).

Ainda que a quantidade de trabalhos abordando diferentes regimes de deformação, condições de ruptura e interação entre duas ou mais gotas utilizando o MIC seja extremamente relevante na literatura científica, vemos que sua implementação ainda apresenta alguns desafios. Por outro lado, a forma integral das equações de Stokes pode ser utilizada como ponto de partida para uma outra formulação numérica, dessa vez baseada no Método de Elementos de

Contorno⁵ (doravante MEC). Embora relativamente moderno quando aplicado a escoamentos governados pelas equações de Stokes, o MEC pode ser interpretado como uma extensão do MIC, tendo sido bastante utilizado na abordagem desse tipo de problema (Kitagawa, 1990; Brebbia & Dominguez, 1992; Power & Wrobel, 1996). Além da economia em esforço computacional associada à redução dimensional do problema, o MEC baseia-se em aproximar os campos desconhecidos através de funções interpoladoras dentro de cada elemento da discretização. Esse procedimento reduz as dificuldades em integrar as funções de Green singulares e melhora o cálculo de elementos geométricos do contorno presentes na formulação, como curvatura e vetor normal. Sendo assim, o MEC mostra-se uma ferramenta bastante eficiente para tratar de problemas de mecânica dos fluidos que envolvem superfícies deformáveis, como é o caso sob estudo nesse projeto.

A metodologia numérica completa do MEC aplicada ao escoamento de gotas em regimes de Stokes foi explorada de forma pioneira por R. E. Khayat e colaboradores utilizando abordagens bidimensionais. A redução dimensional inerente à formulação do método é capaz de solucionar o problema utilizando apenas integrais de linha sobre o contorno. Nesse caso, é comum utilizar o termo gota plana para fazer referência ao problema em duas dimensões. Consequentemente, os resultados são muito mais expressivos do ponto de vista qualitativo, não representando exatamente os fenômenos reais, que exigiriam um modelo mais complexo e realístico em três dimensões. Khayat et al. (1997) estudaram o escoamento de gotas através de canais convergentes, avaliando o impacto da razão entre as viscosidades das fases dispersa e contínua, respectivamente, e a razão de convergência do canal sobre a deformação de gotas inicialmente esféricas e elípticas. Observou-se que o regime de deformação da gota depende essencialmente da geometria do canal, aumentando consideravelmente à medida que a razão de viscosidade decresce abaixo da unidade. Em seguida, Khayat (1998) repetiu a abordagem utilizando um fluido base não Newtoniano descrito pelo modelo *quasi*-linear Oldroyd-B. No mesmo período, Khayat et al. (1998) abordaram o escoamento de gotas em canais de extrusão. Pouco depois, Khayat et al. (2000) também avaliaram a influência da tensão interfacial, do tamanho da gota e da sua posição inicial no domínio fluido sobre seu regime de deformação e alinhamento em escoamentos por canais convergentes e divergentes. Os resultados numéricos obtidos foram comparados com boa concordância a observações experimentais considerando tanto fluidos Newtonianos quanto fluidos não Newtonianos descritos pelo modelo de Maxwell para viscoelasticidade linear. O mesmo Khayat (2000) ainda considerou um problema semelhante para uma gota de fluido não Newtoniano pseudoplástico⁶. Posteriormente, Yan et al. (2006) e Wrobel et al. (2009) estenderam os trabalhos de Khayat et al. (1997, 2000) e utilizaram o MEC para estudar a interação entre duas e três gotas escoando em canais convergentes. Os resultados obtidos indicaram que o processo de coalescência é muito sensível ao tamanho inicial das gotas em relação à constrição do canal. Mais recentemente, Pozrikidis (2012) estudou a passagem

⁵ Do inglês, *Boundary Element Method* ou BEM.

⁶ Do inglês, *shear-thinning*.

de uma gota de mesma viscosidade do fluido base por uma bifurcação, avaliando sua possível ruptura para diferentes ângulos de abertura do canal. Finalmente, vale destacar que Roca & Carvalho (2013) abordaram o problema de uma gota escoando por um capilar com constrição utilizando o Método de Elementos Finitos de Galerkin acoplado à uma formulação de level-set para descrever a interface entre os dois fluidos. Embora a abordagem seja tridimensional, o escoamento é considerado axissimétrico. Sob a ótica da recuperação de óleo residual em meios porosos, os autores mostram predições para o fator de redução de mobilidade, confirmando que essa quantidade é próxima da unidade para gotas de diâmetro muito menor que o diâmetro da constrição. Os autores também mostram que a queda de pressão aumenta com a razão de viscosidade e diâmetro da gota e com a diminuição do número de capilaridade. Ainda assim, reportam as enormes dificuldades de convergência do método, que é Euleriano, especialmente em regimes de grandes deformações. Essa última constatação ratifica mais uma vez a indicação do MEC na abordagem desse tipo de problema.

1.3 Objetivos

Inserido nesse contexto, o objetivo geral do presente Projeto de Graduação é implementar a formulação numérica do Método de Elementos de Contorno ao escoamento de uma gota plana de emulsão através de um canal convergente bidimensional. Com isso, desenvolver um programa na linguagem MATLAB[®] que possibilite a simulação desse escoamento para realização de estudos a cerca do problema. De forma mais específica, os objetivos consistem em:

1. inserir o leitor no contexto físico do problema, partindo das equações de Stokes até alcançar a solução do escoamento pelas integrais de contorno;
2. apresentar o método dos elementos de contorno, bem como discursar de forma detalhada toda a metodologia utilizada para o desenvolvimento do programa;
3. fazer uma validação do método comparando resultados obtidos para escoamentos em torno de contornos sólidos com resultados presentes na literatura;
4. utilizar o programa para realizar diversas simulações do escoamento de uma gota por um canal convergente para diferentes razões de viscosidades, números de capilaridades e tamanhos de gota;
5. observar e discutir como esses parâmetros influenciam a geometria da gota dentro do escoamento e a pressão de bombeamento entre a entrada e saída do canal para vazões fixas.

1.4 Organização do trabalho

O presente trabalho é dividido em seis capítulos, cada qual contendo diversas seções e subseções. O Capítulo 1 apresenta uma introdução contendo alguns dos aspectos práticos que motivam e fundamentam o estudo de gotas de emulsões escoando através de canais convergentes. Apresenta-se ainda uma breve e atualizada revisão bibliográfica sobre o assunto, atentando, principalmente, para a implementação do Método dos Elementos de Contorno em problemas desse tipo. O Capítulo 2, por sua vez, traz a formulação matemática do problema sob análise. Partindo-se das equações de conservação da mecânica do contínuo, toma-se o limite de um escoamento livre de inércia para chegar às equações de Stokes que governam o problema. Além de propriedades relevantes, mostramos como obter a formulação integral dessas equações, destacando as condições físicas da interface entre os fluidos. Dando continuidade ao trabalho, o Capítulo 3 trata da metodologia numérica para simulação computacional do escoamento. Nesse caso, aborda-se de forma detalhada a formulação do MEC, tais como a geração da malha, a interpolação dos campos desconhecidos usando funções de forma quadráticas contínuas, o cálculo de elementos geométricos, como curvatura local e vetor normal unitário, e a solução numérica do sistema de equações algébricas resultante. Resultados obtidos para escoamentos mais conhecidos na literatura com a finalidade de validar o código desenvolvido no trabalho são apresentados no Capítulo 4. Finalmente, o Capítulo 5 apresenta todos resultados gerados com o programa para o escoamento de gotas em canais convergentes e discussões realizadas sobre esses. Por último, o Capítulo 6 traz as conclusões obtidas a cerca dos resultados e expectativas de trabalhos futuros para dar continuidade a este.

2 Modelagem matemática

O presente capítulo é dedicado à modelagem matemática do problema de uma gota plana de fluido Newtoniano imersa em outro fluido Newtoniano imiscível escoando em um canal convergente. As equações de balanço de massa e quantidade de movimento linear para um meio contínuo são apresentadas. Utilizando o tensor das tensões de um fluido Newtoniano incompressível e supondo suas propriedades termofísicas constantes, obtém-se as equações de Navier-Stokes. Uma análise adimensional baseada nas escalas características do escoamento no canal é realizada, verificando-se que o escoamento é livre dos efeitos de inércia. Sob essa circunstância, as equações de Navier-Stokes são reduzidas às equações de Stokes, cujas principais características e propriedades também são discutidas. O problema fundamental do escoamento gerado por um ponto de força é apresentado, abordando-se os principais aspectos de sua solução. Junto com o Teorema da Reciprocidade de Lorentz, esse resultado é utilizado para determinar a forma integral do campo de velocidade em escoamentos de Stokes. Nesse caso, o problema bidimensional é reduzido a uma representação unidimensional por integrais de linha nos contornos do domínio. Finalmente, essa formulação é aplicada a cada um dos meios do escoamento bifásico de uma gota imersa em outro fluido. A condição dinâmica de salto de tensões na interface entre os fluidos é utilizada para compactuar as formulações integrais nos contornos dos dois fluidos. O formato final das equações integrais é um sistema de equações relacionando velocidade e tensão nos contornos do domínio.

2.1 Equações de balanço

Sejam as equações de conservação de massa e quantidade de movimento linear para um meio contínuo, dadas respectivamente por (Batchelor, 1967)

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.1)$$

e

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{g}, \quad (2.2)$$

em que ρ é a massa específica do meio, \mathbf{u} é o vetor velocidade Euleriano, $\boldsymbol{\sigma}$ é o seu tensor das tensões e \mathbf{g} denota uma força de campo por unidade de massa. A Eq. (2.1) é comumente referenciada como equação da continuidade, enquanto a Eq. (2.2) é denominada equação de Cauchy do movimento, sendo uma consequência direta da 2ª Lei de Newton aplicada a um elemento material diferencial. Em ambas as equações pode-se identificar o operador derivada material, definido por $D/Dt = \partial/\partial t + \mathbf{u} \cdot \nabla$ e responsável por medir a taxa de variação temporal

de uma quantidade qualquer calculada a partir de um referencial que translada junto com uma partícula material (isto é, um referencial Lagrangeano). O divergente do tensor de tensões, $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}$, mede a taxa de variação da quantidade de movimento por unidade de volume associada com forças de superfície exercidas sobre o elemento material. Em geral, para meios fluidos o tensor das tensões pode ser decomposto como

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}, \quad (2.3)$$

em que p é a pressão termodinâmica, \mathbf{I} é o tensor identidade e $\boldsymbol{\tau}$ é o campo de extra-tensão que surge devido ao movimento do fluido causado pelo escoamento. Para um fluido em repouso temos que $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{0}$, de sorte que a Eq. (2.3) recupera o tensor das tensões da hidrostática, $\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I}$, e a pressão mecânica, definida como $\mathcal{P} = -\text{tr}(\boldsymbol{\sigma})/3$, iguala-se à pressão termodinâmica. No caso de um fluido incompressível, isto é, um fluido com massa específica constante, a Eq. (2.1) é reduzida à forma

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (2.4)$$

Agora, supondo que o fluido é Newtoniano, a extra-tensão é dada por $\boldsymbol{\tau} = 2\mu\mathbf{D}$, em que \mathbf{D} é o tensor taxa de deformação, definido como a parte simétrica do tensor gradiente de velocidade, $\mathbf{D} = (\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T)/2$. Nesse caso, $\boldsymbol{\tau}$ é uma função linear de \mathbf{D} e representa a contribuição das tensões viscosas para o tensor das tensões. Mais que isso, $\boldsymbol{\tau}$ é um tensor deviatórico¹, de modo que as pressões termodinâmica e mecânica também são iguais nessa situação. Supondo ainda que o escoamento é isotérmico e adiabático e que todas as propriedades termofísicas do fluido permanecem constantes, substitui-se a relação constitutiva de $\boldsymbol{\tau}$ na Eq. (2.2) para obter

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \rho \mathbf{g}. \quad (2.5)$$

A Eq. (2.5) é uma equação vetorial e representa a conservação de quantidade de movimento linear para um fluido Newtoniano incompressível, sendo referenciada como equação de Navier-Stokes. Juntamente com a equação da continuidade, constituem um sistema não linear de equações diferenciais parciais para os campos de velocidade e pressão no escoamento. No caso particular em que \mathbf{g} é devida exclusivamente à ação da gravidade, temos que $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$, em que g é o módulo da aceleração da gravidade local. Como \mathbf{g} é um campo conservativo (ou uma força conservativa por unidade de massa) existe um potencial escalar $\phi = -\mathbf{g} \cdot \mathbf{x}$, em que \mathbf{x} é o vetor posição, tal que $\mathbf{g} = -\nabla\phi = \nabla(\mathbf{g} \cdot \mathbf{x})$. Sendo assim, e sabendo que o fluido é incompressível, é possível incorporar os efeitos hidrostáticos devido à gravidade ao termo de pressão. Para isso, substitui-se a pressão mecânica p pela pressão modificada $P = p - \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{x}$ na Eq. (2.5).

¹ Um tensor deviatórico é um tensor de traço nulo. Note que $\text{tr}(\boldsymbol{\tau}) = 2\mu\text{tr}(\mathbf{D})$, $\text{tr}(\mathbf{D}) = \nabla \cdot \mathbf{u}$ e $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, já que o fluido é incompressível.

2.2 Contexto físico do modelo

Consideremos agora a análise específica do problema de uma gota plana dispersa em outro fluido imiscível escoando por um canal convergente, como mostra a Fig. 1 a seguir. Ambos os fluidos são considerados Newtonianos e de mesma massa específica ρ . A gota (fase dispersa) é inicialmente esférica e tem diâmetro a e viscosidade $\lambda\mu$, e está imersa em outro fluido (fase contínua) de viscosidade μ . Aqui, H e h são as alturas de entrada e saída (garganta) do canal, e P_0 e P_L são as pressões nas seções de entrada e saída, respectivamente. Cada fluido ocupa uma região Ω limitada pelo contorno Γ . Como a forma da gota varia ao longo do escoamento, $\Omega_i(t)$, $\Omega_o(t)$ e $\Gamma_i(t)$ são funções do tempo, enquanto o contorno externo do canal, Γ_o , permanece constante.

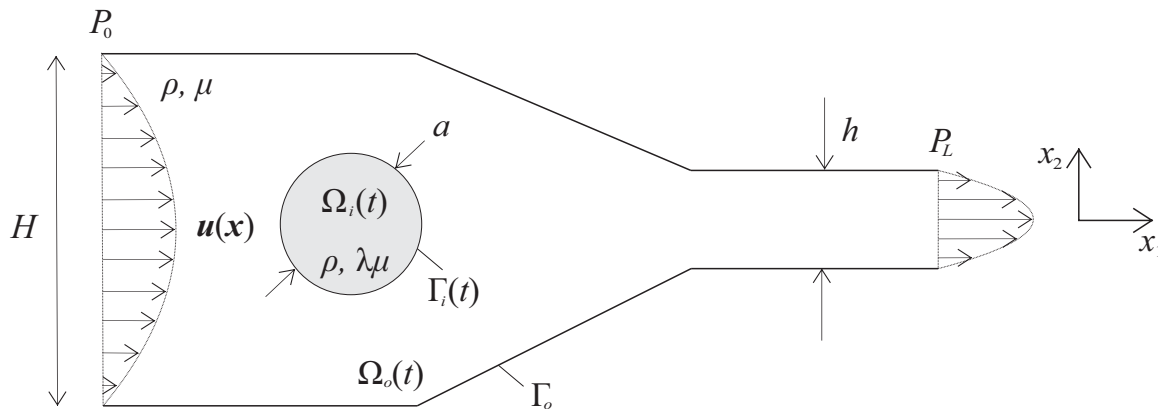


Figura 1 – Representação de uma gota plana dispersa em outro fluido imiscível escoando por um canal convergente. A gota é composta pelo fluido i e a fase contínua é composta pelo fluido o . Cada fluido ocupa uma região Ω limitada pelo contorno Γ .

Com base na Fig. 1, admite-se que o escoamento já está completamente desenvolvido na entrada do canal, de modo que o perfil de velocidade nessa seção é parabólico,

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \frac{3}{2}U \left[1 - \left(\frac{2x_2}{H} \right)^2 \right] \hat{\mathbf{e}}_1, \quad (2.6)$$

em que U é a velocidade média do escoamento. Esse valor está relacionado com a vazão volumétrica do escoamento por $U = Q/A$, em que A é a área da seção transversal do plano de entrada. Note que a Eq. (2.6) é a solução analítica para um escoamento entre placas planas e paralelas causado por um gradiente de pressão². Além disso, a pressão na saída é imposta como $P_L = 0$, de modo que a pressão na entrada (pressão de bombeamento) seja sempre positiva, $P_0 > 0$. De fato, é necessário que o gradiente de pressão seja negativo para que ocorra escoamento nesse caso.

² Lei de Hagen-Poiseuille para um escoamento bidimensional entre placas paralelas causado por um gradiente de pressão.

Dessa maneira, pode-se inferir que U e H são escalas características de velocidade e comprimento do problema, respectivamente. Assim, o número de Reynolds do escoamento no canal é definido como $Re = \rho UH/\mu$. Para um caso típico de injeção de emulsões em meios porosos, tem-se $Q \approx 10^{-12}$ m³/s e $H \approx 100$ μ m (Alvarado & Manrique, 2010). Supondo ainda que as emulsões são formadas por gotas de óleo dispersas em água, com $\rho \approx 10^3$ kg/m³ e $\mu \approx 10^{-3}$ Pa·s, segue que $Re \approx 10^{-2}$, sendo muito menor que a unidade. O número de Reynolds expressa a magnitude das forças de inércia em relação às forças viscosas ou, de forma equivalente, a razão entre um tempo característico de difusão de vorticidade e um tempo característico do transporte convectivo. Dessa maneira, é possível concluir que escoamentos em meios porosos são dominados pela viscosidade, sendo livres de efeitos de inércia (Brenner, 1991).

Os graus de convergência dos canais que modelam meios porosos nesse tipo simulação estão na faixa de 2:1 a 5:1 (Roca & Carvalho, 2013). Sendo assim, a altura h da garganta deve estar entre 20 μ m e 50 μ m, aproximadamente. Um dos efeitos mais importantes da injeção de emulsões de óleo em água em meios porosos no contexto da recuperação de óleo residual em poços produtores é a redução do fator de mobilidade entre as fases. Essa grandeza é definida pela razão entre o gradiente de pressão do escoamento apenas da fase contínua e o gradiente de pressão do escoamento da emulsão. Em linhas gerais, a redução da mobilidade entre as fases está associada a dois mecanismos distintos: (i) um mecanismo viscoso relacionado ao aumento da viscosidade efetiva do fluido pela adição de gotas de um fluido mais viscoso³; e (ii) um mecanismo capilar relacionado à tendência de deformação e alinhamento da gota no escoamento. De fato, aumentando a viscosidade da gota de óleo imersa em água, a viscosidade efetiva do fluido que escoar pelo canal também aumenta, exigindo maior gradiente de pressão para que a vazão seja mantida constante. Essa interpretação é realizada a partir de uma análise simples do escoamento macroscópico da emulsão no meio poroso. Alternativamente, o efeito capilar requer uma análise do escoamento na escala da gota. Enquanto o efeito extensional induzido pela garganta do poro tende a deformar e alinhar a gota na direção das linhas de corrente, a tensão interfacial atua no sentido de recuperar sua configuração esférica inicial. Com isso, é necessário aumentar o gradiente de pressão para vencer a pressão capilar e fazer com que a gota passe pelo canal. Essa aplicação é de grande importância na indústria do petróleo, visto que o aumento da pressão de bombeamento é capaz de recuperar óleo residual aprisionado em gânglios de poros vizinhos. Todavia, para que o efeito capilar manifeste-se, é necessário que o diâmetro inicial da gota seja da mesma ordem de grandeza do diâmetro da garganta. Se $a \ll h$, a pressão capilar é muito baixa e a gota atravessa a região da constrição sem manifestar qualquer reação expressiva ao efeito extensional, não sendo necessário impor mudanças significativas no gradiente de pressão. Por outro lado, se $a \gg h$, não há gradiente de pressão capaz de vencer esse impedimento físico à passagem da gota; assim, a gota fica estagnada na entrada do poro e o escoamento é interrompido. Aqui, adota-se $0,4 < a/H < 0,8$, tal que a esteja na faixa de 40 μ m a 80 μ m.

³ Para emulsões de óleo em água, tipicamente tem-se que $\lambda > 1$.

Por outro lado, para processos difusivos em nível molecular, o número de Peclet da gota é dado por $Pe = Ua/\mathcal{D}$, em que $\mathcal{D} = kT/(6\pi\mu a)$ é o coeficiente de difusão de Stokes-Einstein, sendo k a constante de Boltzmann e T a temperatura absoluta. O número de Peclet pode ser interpretado como a razão entre um tempo característico da escala convectiva e um tempo característico do processo difusivo associado ao movimento Browniano das moléculas do fluido base (Einstein, 1956). Dessa maneira, adotando as mesmas hipóteses descritas anteriormente e supondo $T \approx 300$ K, estima-se que $Pe \approx 10^5$, que é muito maior que a unidade. Consequentemente, o tempo necessário para se observar a influência da difusão molecular é muito maior que o relacionado ao transporte convectivo pelo campo de velocidade. Assim, os efeitos do movimento Browniano não são relevantes para hidrodinâmica do escoamento da gota.

Vale destacar que tratamos do escoamento de gotas isoladas. Em outras palavras, a emulsão pode ser considerada infinitamente diluída na escala dos poros representados pela constrição no canal. Dessa maneira, efeitos de interação hidrodinâmica entre gotas, usuais em análises de regimes mais concentrados, podem ser negligenciados. Por fim, atentamos ao fato de que possíveis mecanismos de migração e/ou difusão da gota devido à gradientes da taxa de cisalhamento, por exemplo, também são desconsiderados.

2.3 Equações de Stokes

Considerando as equações de balanço obtidas na Seção 2.1, vamos utilizar as hipóteses definidas na Seção 2.2 para tratar as equações governantes do escoamento. Então, sejam U , H e $1/\omega_c$ escalas características de velocidade, comprimento e tempo, respectivamente, em que ω_c é uma frequência de excitação do escoamento. Levando-se em conta que uma escala de pressão adequada para escoamentos com inércia desprezível é $p_c = \mu U/H$, a Eq. (2.5) é adimensionalizada como (Pozrikidis, 1992)

$$Re\,Sh\,\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial \tilde{t}} + Re\,\tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{u}} = -\tilde{\nabla} \tilde{p} + \tilde{\nabla}^2 \tilde{\mathbf{u}} + \frac{Re}{Fr} \tilde{\mathbf{g}}, \quad (2.7)$$

em que $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}/H$, $\tilde{t} = \omega_c t$, $\tilde{\nabla} = H\nabla$, $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}/U$, $\tilde{p} = p/p_c$, e $\tilde{\mathbf{g}} = \mathbf{g}/g$ são variáveis adimensionais, $Re = \rho UH/\mu$ é o número de Reynolds, $Sh = \omega_c H/U$ é o número de Strouhal e $Fr = U^2/(ga)$ é o número de Froude. O número de Reynolds mede a razão entre as magnitudes das forças de inércia e das forças viscosas (como discutido anteriormente). O número de Strouhal é relevante se o padrão de escoamento for oscilatório, expressando uma frequência adimensional característica; caso não exista uma frequência de excitação externa imposta ao escoamento, adota-se $\omega_c = U/a$ e $Sh = 1$. O número de Froude é um parâmetro importante em escoamentos com superfície livre, expressando a razão entre as magnitudes das forças de inércia e de campo. Dessa forma, o grupo Re/Fr representa a relação entre as intensidades das forças de campo e das forças viscosas.

Tomando os casos limite em que $Re \ll 1$ e $Re Sh \ll 1$, os termos do lado esquerdo da Eq. (2.7) podem ser desprezados, tornando a equação do movimento linear. Esse caso é o *limite dual* das equações do movimento e caracteriza o escoamento como *quasi*-estacionário. Sob essas condições, o tempo necessário para a evolução do campo de velocidade de um estado permanente para outro é muito menor do que o tempo típico de uma mudança perceptível na configuração do contorno da gota. Em outras palavras, o tempo característico de relaxação da gota é muito maior que o tempo característico de propagação da vorticidade⁴ ao longo do escoamento. Fisicamente, essa condição expressa que os campos de velocidade e pressão ajustam-se em intervalos muito menores do que aqueles em que a configuração do contorno muda. Desta forma, o escoamento é sempre permanente com respeito à configuração instantânea (Cunha, 2003). Deixando de lado a utilização do til para representar as grandezas adimensionais (para aliviar a notação do texto), temos que as equações governantes do escoamento de um fluido Newtoniano incompressível livre dos efeitos de inércia são as equações de Stokes, dadas por (Kim & Karrila, 1991)

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.8)$$

e

$$-\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \rho \mathbf{g} = \mathbf{0}. \quad (2.9)$$

Sob as condições necessárias, o conceito de pressão modificada pode ser utilizado mais uma vez, de modo que a Eq. (2.9) é reduzida à forma $-\nabla P + \mu \nabla^2 \mathbf{u} = \mathbf{0}$.

A linearidade das equações de Stokes tem consequências diretas sobre a dinâmica do movimento, provendo propriedades e características importantes aos escoamentos em baixos números de Reynolds. Como consequência direta da linearidade, verifica-se que a força hidrodinâmica sobre uma partícula transladando em um fluido Newtoniano em regimes de Stokes depende linearmente da velocidade. Assim, se o sentido da força é invertido, inverte-se também o sentido do movimento, caracterizando o escoamento de Stokes como reversível (em termos cinemáticos) em relação ao tempo (Brenner, 1991). Além disso, também é possível mostrar que em regimes de baixos números de Reynolds os campos de pressão e vorticidade são harmônicos, tais que $\nabla^2 P = 0$ e $\nabla^2 \boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}$. Mais que isso, o campo de velocidade é biarmônico, $\nabla^2 \nabla^2 \mathbf{u} = \nabla^4 \mathbf{u} = \mathbf{0}$. Esses resultados sugerem que a solução de problemas de Stokes pode ser obtida expandindo os campos de pressão, vorticidade e velocidade em uma série de funções harmônicas sólidas (Lamb, 1932; Frankel & Acrivos, 1970). Escoamentos em regimes de Stokes ainda apresentam outras propriedades importantes, como a unicidade de sua solução e a verificação do teorema da mínima dissipação de energia interna. Mais detalhes sobre essas e outras propriedades das equações de Stokes e sua solução são descritos por Kim & Karrila (1991).

⁴ O campo de vorticidade do escoamento é definido como $\boldsymbol{\xi} = \nabla \times \mathbf{u}$.

2.4 Teorema da Reciprocidade de Lorentz

Sejam dois escoamentos quaisquer de um mesmo fluido em uma região Ω do plano delimitada pelo contorno Γ . Os campos de velocidade e tensão de cada escoamento são $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$ e $(\mathbf{u}', \boldsymbol{\sigma}')$. Além disso, ambos os escoamentos são livres de inércia e satisfazem as equações de Stokes. Sob essas condições, o Teorema da Reciprocidade de Lorentz postula que (Kim & Karrila, 1991; Pozrikidis, 1992)

$$\int_{\Gamma} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u}') \cdot \hat{\mathbf{n}} \, d\Gamma + \int_{\Omega} (\mathbf{u}' \cdot \mathbf{f}) \, d\Omega = \int_{\Gamma} (\boldsymbol{\sigma}' \cdot \mathbf{u}) \cdot \hat{\mathbf{n}} \, d\Gamma + \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{f}') \, d\Omega, \quad (2.10)$$

em que Ω é a região ocupada pelo fluido, Γ é o seu contorno, $\hat{\mathbf{n}}$ é o vetor normal unitário e exterior ao contorno e \mathbf{f} é uma força de campo por unidade de área.

Para demonstrar a Eq. (2.10), consideremos que os dois escoamentos são de um mesmo fluido Newtoniano incompressível de viscosidade μ . Sendo assim, os tensores das tensões são expressos por $\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D}$ e $\boldsymbol{\sigma}' = -p'\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D}'$. Agora, para cada caso, tomemos o produto escalar duplo entre o tensor das tensões de um escoamento e o tensor taxa de deformação do outro, isto é, $\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}' = -p\mathbf{I} : \mathbf{D}' + 2\mu\mathbf{D} : \mathbf{D}'$ e $\boldsymbol{\sigma}' : \mathbf{D} = -p'\mathbf{I} : \mathbf{D} + 2\mu\mathbf{D}' : \mathbf{D}$. Então, utilizando a condição de incompressibilidade⁵ e o fato de \mathbf{D} e \mathbf{D}' serem simétricos⁶, segue que

$$\boldsymbol{\sigma}' : \mathbf{D} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}'. \quad (2.11)$$

Por outro lado, considerando a simetria do tensor das tensões (desde que nem o fluido nem as partículas sejam magnéticas, não existindo torques internos induzidos no material) e o fato de o produto escalar duplo entre um tensor simétrico e outro antissimétrico ser nulo, temos que⁷ $\boldsymbol{\sigma} : \nabla \mathbf{u}' = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}'$ e $\boldsymbol{\sigma}' : \nabla \mathbf{u} = \boldsymbol{\sigma}' : \mathbf{D}$. Utilizando esses resultados e uma identidade vetorial conhecida⁸ obtemos

$$\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}' = \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u}') - (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{u}' \quad (2.12)$$

e

$$\boldsymbol{\sigma}' : \mathbf{D} = \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma}' \cdot \mathbf{u}) - (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}') \cdot \mathbf{u}. \quad (2.13)$$

Por fim, subtraindo a Eq. (2.12) da Eq. (2.13), usando o resultado da Eq. (2.11) e sabendo que $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f}$ e $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{f}'$ como consequência direta das equações de Stokes, tem-se que

⁵ Note que $\mathbf{I} : \mathbf{D} = \text{tr}(\mathbf{D}) = \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ e $\mathbf{I} : \mathbf{D}' = \text{tr}(\mathbf{D}') = \nabla \cdot \mathbf{u}' = 0$, já que os dois fluidos são incompressíveis.

⁶ Pela simetria do tensor taxa de deformação, segue que $\mathbf{D}' : \mathbf{D} = \mathbf{D} : \mathbf{D}'$.

⁷ Note que $\boldsymbol{\sigma} : \nabla \mathbf{u} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{W}$, em que $\mathbf{W} = (\nabla \mathbf{u} - \nabla \mathbf{u}^T)/2$ é a parte antissimétrica do tensor gradiente de velocidade, denominada tensor de rotação. Como $\boldsymbol{\sigma}$ é simétrico, segue que $\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{W} = 0$ e, com isso, $\boldsymbol{\sigma} : \nabla \mathbf{u} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}$. O mesmo vale para $\boldsymbol{\sigma}'$ e $\nabla \mathbf{u}'$.

⁸ Fazendo referência às identidades $\boldsymbol{\sigma} : \nabla \mathbf{u}' = \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u}') - (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{u}'$ e $\boldsymbol{\sigma}' : \nabla \mathbf{u} = \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma}' \cdot \mathbf{u}) - (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}') \cdot \mathbf{u}$.

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u}' - \boldsymbol{\sigma}' \cdot \mathbf{u}) = \mathbf{f}' \cdot \mathbf{u} - \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}'. \quad (2.14)$$

Integrando a Eq. (2.14) em uma região simplesmente conexa de fluido e usando o Teorema da Divergência de Gauss no plano, chega-se ao resultado apresentado na Eq. (2.10). Vale notar que na ausência de forças de campo a Eq. (2.14) reduz-se a $\nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u}' - \boldsymbol{\sigma}' \cdot \mathbf{u}) = 0$.

O resultado expresso pela Eq. (2.14) na forma diferencial é referenciado na literatura como Teorema da Reciprocidade de Lorentz ou, simplesmente, Identidade Recíproca (Kim & Karrila, 1991; Pozrikidis, 1992). Esse teorema pode ser utilizado para demonstrar diversas propriedades de escoamentos em baixos números de Reynolds, sendo fundamental na determinação da forma integral das equações de Stokes. Mais que isso, sob condições bem determinadas, o teorema é capaz de relacionar dois escoamentos distintos do mesmo fluido. Em outras palavras, é possível obter informações sobre determinado escoamento sem a necessidade de resolvê-lo explicitamente. Ao invés disso, utiliza-se dados de outro escoamento já conhecido. No contexto da representação integral do escoamento sobre a superfície de gotas de emulsões, o caso mais comum consiste em utilizar a solução do problema fundamental do escoamento de Stokes.

2.5 Solução fundamental do escoamento de Stokes

O problema fundamental do escoamento de Stokes corresponde ao escoamento gerado pela presença de um ponto de força em um domínio infinito de fluido (Ladyzhenskaya, 1969). Matematicamente, temos que

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.15)$$

e

$$-\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} = \mathbf{F} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \quad (2.16)$$

para $(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \in \mathbb{R}^2$. Aqui, \mathbf{F} é uma força concentrada aplicada sobre o fluido, \mathbf{x}_0 é a posição do ponto de força e $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ é a distribuição Delta de Dirac no plano, a qual satisfaz às seguintes propriedades (Kreyszig, 1999),

$$\int_{\mathbb{R}^2} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) d\Omega = 1 \quad (2.17)$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^2} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) f(\mathbf{x}) d\Omega = f(\mathbf{x}_0). \quad (2.18)$$

A solução do problema diferencial representado pelas Eqs. (2.15) e (2.16) pode ser determinada por diferentes métodos algébricos (Kim & Karrila, 1991; Pozrikidis, 1992; Dhont, 1996; Zapryanov & Tabakova, 1999). Vamos descrever de forma sintética a solução via transformada de Fourier bidimensional, definida segundo o par de transformadas

$$\mathfrak{F}\{f(\mathbf{x})\} = \hat{f}(\mathbf{k}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} f(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{x} \quad (2.19)$$

e

$$\mathfrak{F}^{-1}\{\hat{f}(\mathbf{x})\} = f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \hat{f}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{k}, \quad (2.20)$$

em que f é uma função qualquer e $\mathbf{k} = (2\pi/\lambda)\hat{\mathbf{e}}_j$ é vetor número de onda, sendo $\hat{\mathbf{e}}_j$ o vetor unitário em cada direção ($j = 1, 2$ no plano). Ainda é importante ressaltar algumas propriedades da transformada de Fourier que serão utilizadas na demonstração, tais como

$$\mathfrak{F}\{\nabla \cdot \mathbf{a}(\mathbf{x})\} = i\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{a}}(\mathbf{k}), \quad \mathbf{a}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^2 \quad (2.21)$$

e

$$\mathfrak{F}^{-1}\{i\mathbf{k} \hat{\mathbf{a}}(\mathbf{k})\} = \nabla \mathfrak{F}^{-1}\{\hat{\mathbf{a}}(\mathbf{k})\}, \quad \hat{\mathbf{a}}(\mathbf{k}) \in \mathbb{R}. \quad (2.22)$$

De acordo com a propriedade dada na Eq. (2.22), tem-se que $\mathfrak{F}\{\nabla^2\} = -k^2$, em que $k^2 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}$. A equação da continuidade no espaço recíproco de Fourier (ou espaço de número de onda) é obtida aplicando-se a transformada à Eq. (2.15), e assume a forma

$$\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}) = 0. \quad (2.23)$$

Agora, apliquemos a transformada de Fourier à equação de quantidade de movimento e consideremos, por ora, que o monopolo está concentrado na origem (isto é, $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$). Com isso, temos que

$$\mu k^2 \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}) + i\mathbf{k} \hat{p}(\mathbf{k}) = -\mathbf{F} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \delta(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{x}. \quad (2.24)$$

Usando a propriedade da Eq. (2.18) com $f(\mathbf{x}) = e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$ e $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ verifica-se que a integral do lado direito da equação anterior é igual a unidade. Portanto, a equação da quantidade de movimento no espaço recíproco reduz-se a

$$\mu k^2 \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}) + i\mathbf{k} \hat{p}(\mathbf{k}) = -\frac{1}{2\pi} \mathbf{F}. \quad (2.25)$$

Multiplicando-se escalarmente a Eq. (2.25) por \mathbf{k} e usando a Eq. (2.23), segue que

$$\hat{p}(\mathbf{k}) = \frac{i}{2\pi} \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{k}}{k^2}. \quad (2.26)$$

E substituindo a Eq. (2.26) na Eq. (2.25) e isolando o campo de velocidade obtém-se

$$\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}) = -\frac{1}{2\pi\mu k^2} \mathbf{F} \cdot \left(\mathbf{I} - \frac{\mathbf{k}\mathbf{k}}{k^2} \right). \quad (2.27)$$

Os resultados dados pelas Eqs. (2.26) e (2.27) são expressões para os campos de pressão e velocidade, respectivamente, no espaço recíproco de Fourier. Para determinar os campos correspondentes no espaço físico, devemos utilizar a transformada inversa de Fourier e suas propriedades.

Para o campo de pressão, temos que $p(\mathbf{x}) = \mathfrak{F}^{-1}\{\hat{p}(\mathbf{k})\} = \mathfrak{F}^{-1}\{(i/2\pi k^2) \mathbf{F} \cdot \mathbf{k}\} = (1/2\pi) \mathbf{F} \cdot \mathfrak{F}^{-1}\{i\mathbf{k} k^{-2}\}$. De acordo com a propriedade da Eq. (2.22), a última transformada inversa pode ser escrita como $\mathfrak{F}^{-1}\{i\mathbf{k} k^{-2}\} = \nabla \mathfrak{F}^{-1}\{k^{-2}\}$. Portanto,

$$p(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \mathbf{F} \cdot \nabla \left[\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{k^2} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{k} \right]. \quad (2.28)$$

Usando que $\int_{\mathbb{R}^2} k^{-2} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{k} = -2\pi \log x$ e $\nabla(\log x) = \mathbf{x}/x^2$, em que $x = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x})^{1/2}$, a solução fundamental para campo de pressão pode ser escrita como

$$p(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2\pi} \mathbf{F} \cdot \left(\frac{\mathbf{x}}{x^2} \right). \quad (2.29)$$

O campo de velocidade pode ser obtido procedendo da mesma maneira. Nesse caso, temos que $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathfrak{F}^{-1}\{\mathbf{u}(\mathbf{k})\} = \mathfrak{F}^{-1}\{-(1/2\pi\mu k^2) \mathbf{F} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{k}\mathbf{k}/k^2)\} = -(1/2\pi\mu) \mathbf{F} \cdot \mathbf{I} \mathfrak{F}^{-1}\{k^{-2}\} + (1/2\pi\mu) \mathbf{F} \cdot \mathfrak{F}^{-1}\{\mathbf{k}\mathbf{k} k^{-4}\}$. A transformada inversa $\mathfrak{F}^{-1}\{k^{-2}\}$ é conhecida e já foi utilizada na determinação do campo de pressão. Por outro lado, a transformada inversa $\mathfrak{F}^{-1}\{\mathbf{k}\mathbf{k} k^{-4}\}$ deve ser trabalhada de acordo com a propriedade da Eq. (2.22). De fato, tomando o gradiente de ambos os lados da referida propriedade, mostra-se que $\mathfrak{F}^{-1}\{\mathbf{k}\mathbf{k} \hat{a}(\mathbf{k})\} = -\nabla \nabla \mathfrak{F}^{-1}\{\hat{a}(\mathbf{k})\}$. Dessa maneira,

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2\pi\mu} \mathbf{F} \cdot \mathbf{I} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{k^2} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{k} \right] - \frac{1}{2\pi\mu} \mathbf{F} \cdot \nabla \nabla \left[\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{k^4} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{k} \right]. \quad (2.30)$$

Então, usando que $\int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{k^4} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{k} = (\pi/2)x^2(\log x - 1)$ e $\nabla \nabla [x^2(\log x - 1)] = -(\mathbf{I} \log x)/2 + \mathbf{I}/4 - \mathbf{x}\mathbf{x}/(2x^2)$, obtemos a solução fundamental para campo de velocidade, dada por

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi\mu} \mathbf{F} \cdot \left(\mathbf{I} \log \frac{1}{x} + \frac{\mathbf{x}\mathbf{x}}{x^2} \right). \quad (2.31)$$

Se o ponto de força não estiver localizado na origem, a solução fica modificada apenas por uma translação, podendo ser reescrita de forma geral como

$$p(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = -\frac{1}{2\pi} \mathbf{F} \cdot \mathcal{P}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \quad (2.32)$$

e

$$\mathbf{u}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = -\frac{1}{4\pi\mu} \mathbf{F} \cdot \mathcal{J}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0). \quad (2.33)$$

Aqui, $\mathcal{P}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}/r^2$ e $\mathcal{J}(\mathbf{r}) = -\mathbf{I} \log r + \mathbf{r}\mathbf{r}/r^2$ são funções de Green, $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ é posição de um ponto qualquer em relação ao pólo e $r = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{1/2}$ é a distância entre eles. Os campos $p(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ e $\mathbf{u}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ são, respectivamente, os distúrbios de pressão e velocidade produzidos por um ponto (ou monopolo) de força \mathbf{F} localizado na posição \mathbf{x}_0 . Esses campos mostram como é a interação hidrodinâmica entre partículas infinitesimais em escoamentos de Stokes. O vetor \mathcal{P} e o tensor de segunda ordem \mathcal{J} são propagadores dos distúrbios de pressão e velocidade, respectivamente. O tensor $\mathcal{J}(\mathbf{r})$ é muitas vezes referenciado como tensor de Oseen (Kim & Karrila, 1991), enquanto o campo de velocidade gerado pelo ponto de força, $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = -(4\pi\mu)^{-1} \mathbf{F} \cdot \mathcal{J}(\mathbf{r})$, é conhecido como *Stokeslet* (Batchelor, 1970).

O tensor das tensões para esse escoamento pode ser expresso em termos das funções de Green $\mathcal{P}(\mathbf{r})$ e $\mathcal{J}(\mathbf{r})$. Para tanto, basta substituir suas definições na relação constitutiva para o tensor das tensões de um Fluido Newtoniano⁹, obtendo

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \mathbf{F} \cdot [-2\mathcal{P}(\mathbf{r})\mathbf{I} + \nabla \mathcal{J}(\mathbf{r}) + \nabla \mathcal{J}^T(\mathbf{r})]. \quad (2.34)$$

Notando que $\nabla \mathcal{J}(\mathbf{r}) = \mathbf{I}\mathbf{r}/r^2 - 2\mathbf{r}\mathbf{r}\mathbf{r}/r^4$ e usando sua simetria para obter $\nabla \mathcal{J}^T(\mathbf{r})$, mostra-se que

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = -\frac{1}{4\pi} \mathbf{F} \cdot \mathcal{K}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \quad (2.35)$$

em que $\mathcal{K}(\mathbf{r}) = -4\mathbf{r}\mathbf{r}\mathbf{r}/r^4$ é uma função de Green tensorial de terceira ordem associada à propagação do distúrbio de tensão gerado por um dipolo hidrodinâmico em escoamentos de Stokes com partículas livres de torque, sendo comumente referenciado como *Stresslet* (Batchelor, 1970).

Vale destacar que os propagadores de pressão, velocidade e tensão da solução fundamental do escoamento de Stokes são funções geométricas exclusivas da distância relativa ou configuração de monopolos no espaço. Em geral, esses propagadores apresentam decaimento lento, tipicamente $\mathcal{O}(1/r)$. Dessa forma, mesmo partículas relativamente afastadas umas das outras interagem de forma significativa (interações de longo alcance) em escoamentos de Stokes. Mais que isso, pelas próprias definições, é fácil notar que $\mathcal{P}(\mathbf{r})$ e $\mathcal{K}(\mathbf{r})$ apresentam simetria ímpar, enquanto $\mathcal{J}(\mathbf{r})$ apresenta simetria par. Os tensores $\mathcal{J}(\mathbf{r})$ e $\mathcal{K}(\mathbf{r})$ também são simétricos em relação ao produto escalar por um vetor arbitrário. Tão relevante quanto é o fato de as três funções de Green (ou funções mobilidade) que aparecem na solução fundamental serem singulares em $\mathbf{r} = \mathbf{0}$, ou, de forma equivalente, em $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$. Mais detalhes sobre o problema fundamental do escoamento de Stokes, inclusive em uma análise no espaço tridimensional, e sobre as funções de Green que aparecem em sua solução podem ser encontrados em Kim & Karrila (1991) e Pozrikidis (1992).

⁹ Aqui, é conveniente usar que $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}) = -p(\mathbf{r})\mathbf{I} + \mu[\nabla \mathbf{u}(\mathbf{r}) + \nabla \mathbf{u}^T(\mathbf{r})]$ para um fluido Newtoniano.

2.6 Representação integral do escoamento de Stokes

A partir dos resultados apresentados nas Seções 2.4 e 2.5, é possível obter uma representação integral do campo de velocidade em um escoamento de Stokes. Para tanto, vamos considerar o Teorema da Reciprocidade em sua forma diferencial, como descreve a Eq. (2.14), e utilizar o par de escoamentos $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{f})$ e $(\mathbf{u}', \boldsymbol{\sigma}', \mathbf{f}')$. O primeiro escoamento é considerado livre de forças de campo (isto é, $\mathbf{f} = \mathbf{0}$), de sorte que a identidade recíproca reduz-se a $\nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u}' - \boldsymbol{\sigma}' \cdot \mathbf{u}) = \mathbf{f}' \cdot \mathbf{u}$. O segundo escoamento, por sua vez, é produzido por um monopolo de força de intensidade \mathbf{F} localizado na posição \mathbf{x}_0 , tal que $\mathbf{f}' = -\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = -\mathbf{F}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$. Assim sendo, segue que

$$\frac{1}{4\pi\mu} \mathbf{F} \cdot \nabla \cdot [\mathcal{J}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) - \mu \mathcal{K}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x})] = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}). \quad (2.36)$$

Integrando a Eq. (2.36) em uma região de fluido Ω limitada pelo contorno Γ , aplicando o Teorema de Gauss no plano e considerando \mathbf{F} arbitrário (utilizando o Teorema de Localização), obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \mathbf{u}(\mathbf{x}) d\Omega(\mathbf{x}) &= \frac{1}{4\pi\mu} \int_{\Gamma} \mathcal{J}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \cdot \hat{\mathbf{n}} d\Gamma(\mathbf{x}) \\ &- \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathcal{K}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \hat{\mathbf{n}} d\Gamma(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (2.37)$$

Utilizando propriedades conhecidas da distribuição Delta de Dirac (Abramovitz & Stegun, 1964), a representação integral do escoamento de Stokes fica

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{x}_0 \in \Omega, \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}_0) \\ \mathbf{x}_0 \in \Gamma, \quad c(\mathbf{x}_0) \mathbf{u}(\mathbf{x}_0) \\ \mathbf{x}_0 \notin \Omega, \quad \mathbf{0} \end{array} \right\} = \frac{1}{4\pi\mu} \int_{\Gamma} \mathcal{J}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \cdot \hat{\mathbf{n}} d\Gamma(\mathbf{x}) - \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathcal{K}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \hat{\mathbf{n}} d\Gamma(\mathbf{x}), \quad (2.38)$$

em que $c(\mathbf{x}_0)$ é uma constante que surge na integração da função Delta de Dirac e depende da geometria do contorno. A Eq. (2.38) é representação em formato integral para o distúrbio de velocidade na posição \mathbf{x}_0 . A primeira integral do lado direito quantifica os efeitos de uma distribuição contínua de pontos de força sobre o contorno Γ , sendo conhecida simples camada potencial¹⁰. A segunda integral, por sua vez, pode ser interpretada como uma distribuição contínua de dipolos hidrodinâmicos ao longo de Γ , sendo referenciada como dupla camada potencial¹¹. Essa nomenclatura é uma analogia à teoria potencial eletromagnética, como discutido por Kim & Karrila (1991).

¹⁰ Do inglês, *single-layer potential*.

¹¹ Do inglês, *double-layer potential*.

2.7 Representação integral do escoamento na superfície de uma gota

A última parte da formulação matemática do problema consiste em obter a representação integral do escoamento de Stokes sobre a superfície de uma gota confinada em um domínio fechado. Para isso, vamos considerar a forma integral do campo de velocidade dada pela Eq. (2.38) para cada um dos fluidos quando o escoamento é visto como bifásico. Sendo assim, seja a Fig. 2 a seguir, que mostra, de forma geral, uma gota composta pelo fluido i imersa em outro fluido o . Seguindo o contexto deste trabalho, ambos os fluidos são considerados Newtonianos e de mesma massa específica ρ . A gota tem viscosidade $\lambda\mu$ e o fluido ambiente tem viscosidade μ . Ainda mantendo a nomenclatura utilizada na Fig. 1, a região ocupada por cada fluido e seu contorno são representados por Ω e Γ , respectivamente. Como a gota deforma-se durante o escoamento, $\Omega_i(t)$, $\Omega_o(t)$ e $\Gamma_i(t)$ são funções do tempo, enquanto o contorno externo Γ_o permanece constante. Além disso, $\hat{\mathbf{n}}$ e $\hat{\mathbf{n}}'$ representam os vetores unitários normais aos contornos que definem a região ocupada por cada meio.

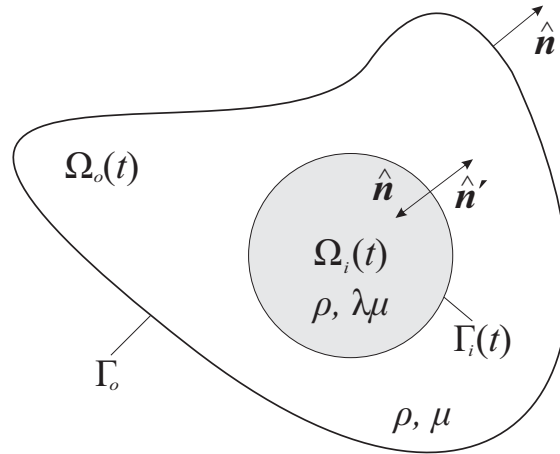


Figura 2 – Representação genérica de uma gota plana (fluido i) imersa em outro fluido imiscível (fluido o) em um domínio fechado.

Primeiro, vamos considerar a representação integral do escoamento do fluido ambiente que envolve a gota. Nesse caso, temos que

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{x}_0 \in \Omega_o(t), \\ \mathbf{x}_0 \in \Gamma_o(t) \cup \Gamma_i(t), \\ \mathbf{x}_0 \in \Omega_i(t), \end{array} \quad \begin{array}{l} \mathbf{u}_o(\mathbf{x}_0, t) \\ c(\mathbf{x}_0, t)\mathbf{u}_o(\mathbf{x}_0, t) \\ \mathbf{0} \end{array} \right\} = \frac{1}{4\pi\mu} \int_{\Gamma_o \cup \Gamma_i(t)} \mathcal{J}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \boldsymbol{\sigma}_o(\mathbf{x}, t) \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}, t) d\Gamma(\mathbf{x}) \\ - \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_o \cup \Gamma_i(t)} \mathbf{u}_o(\mathbf{x}, t) \cdot \mathcal{K}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}, t) d\Gamma(\mathbf{x}). \quad (2.39)$$

Procedendo da mesma maneira para o fluido que compõe a gota e notando que $\hat{\mathbf{n}} = -\hat{\mathbf{n}}'$ sobre o contorno $\Gamma_i(t)$ que define a superfície da gota em determinado instante, segue que

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}_0 \in \Omega_o(t) \cup \Gamma_o, & \quad \mathbf{0} \\ \mathbf{x}_0 \in \Gamma_i(t), & \quad c(\mathbf{x}_0, t) \mathbf{u}_i(\mathbf{x}_0, t) \\ \mathbf{x}_0 \in \Omega_i(t), & \quad \mathbf{u}_i(\mathbf{x}_0, t) \end{aligned} \right\} = -\frac{1}{4\pi\lambda\mu} \int_{\Gamma_i(t)} \mathcal{J}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \boldsymbol{\sigma}_i(\mathbf{x}, t) \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}, t) d\Gamma(\mathbf{x}) \\ + \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_i(t)} \mathbf{u}_i(\mathbf{x}, t) \cdot \mathcal{K}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}, t) d\Gamma(\mathbf{x}). \quad (2.40)$$

As Eqs. (2.39) e (2.40) são representações integrais distintas para os escoamentos dentro e fora da gota. Todavia, é necessário que haja continuidade de velocidade na interface entre os dois fluidos que caracteriza a superfície da gota. Essa constatação pode ser interpretada como uma condição cinemática do problema. Matematicamente, deve-se impor que para $\mathbf{x}_0 \in \Gamma_i$, $\mathbf{u}_i(\mathbf{x}_0, t) = \mathbf{u}_o(\mathbf{x}_0, t)$. Sendo assim, multiplica-se a Eq. (2.40) por λ e soma-se esse resultado com a Eq. (2.39) para mostrar que

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_0 \in \Gamma_i(t), \quad c(\mathbf{x}_0, t)(\lambda + 1)\mathbf{u}_i(\mathbf{x}_0, t) &= \frac{1}{4\pi\mu} \int_{\Gamma_o} \mathcal{J}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{t}_o(\mathbf{x}, t) d\Gamma(\mathbf{x}) \\ &- \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_o} \mathbf{u}_o(\mathbf{x}, t) \cdot \mathcal{K}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}, t) d\Gamma(\mathbf{x}) \\ &+ \frac{1}{4\pi\mu} \int_{\Gamma_i(t)} \mathcal{J}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \Delta \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) d\Gamma(\mathbf{x}) \\ &- \frac{1 - \lambda}{4\pi} \int_{\Gamma_i(t)} \mathbf{u}_i(\mathbf{x}, t) \cdot \mathcal{K}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}, t) d\Gamma(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (2.41)$$

Da mesma forma,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_0 \in \Gamma_o, \quad c(\mathbf{x}_0, t)\mathbf{u}_o(\mathbf{x}_0, t) &= \frac{1}{4\pi\mu} \int_{\Gamma_o} \mathcal{J}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{t}_o(\mathbf{x}, t) d\Gamma(\mathbf{x}) \\ &- \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_o} \mathbf{u}_o(\mathbf{x}, t) \cdot \mathcal{K}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}, t) d\Gamma(\mathbf{x}) \\ &+ \frac{1}{4\pi\mu} \int_{\Gamma_i(t)} \mathcal{J}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \Delta \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) d\Gamma(\mathbf{x}) \\ &- \frac{1 - \lambda}{4\pi} \int_{\Gamma_i(t)} \mathbf{u}_i(\mathbf{x}, t) \cdot \mathcal{K}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}, t) d\Gamma(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (2.42)$$

Nas Eqs. (2.41) e (2.42), $\mathbf{t}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}, t)$ é o vetor tensão para cada um dos meios e $\Delta \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = [\boldsymbol{\sigma}_o(\mathbf{x}, t) - \boldsymbol{\sigma}_i(\mathbf{x}, t)] \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}, t)$ é o salto de tensões através da interface $\Gamma_i(t)$ entre os fluidos que define a superfície da gota. Para interfaces viscosas, o salto de tensões é dado por (Pozrikidis, 1992)

$$\Delta \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \sigma \kappa(\mathbf{x}, t) \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}, t) - \nabla_s(\mathbf{x}) \sigma - \Delta \rho(\mathbf{g} \cdot \mathbf{x}) \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}, t), \quad (2.43)$$

em que σ é o coeficiente de tensão interfacial entre os fluidos, $\kappa(\mathbf{x}, t) = [\nabla_s(\mathbf{x}) \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}, t)]/2$ é a curvatura da superfície, $\nabla_s(\mathbf{x}) = (\mathbf{I} - \mathbf{x}\mathbf{x}) \cdot \nabla$ é o vetor gradiente projetado sobre a superfície e $\Delta \rho = \rho_i - \rho_o$ é a diferença entre as massas específicas dos fluidos. O primeiro termo da Eq. (2.43) representa um salto de tensões na direção normal à interface, de maneira que a tensão superficial atue no sentido de manter o formato da interface, suportando maior pressão do lado côncavo. Por outro lado, o segundo termo está relacionado a um salto de tensões na direção tangencial à interface, o qual pode ser provocado por gradientes superficiais do coeficiente de tensão interfacial $\nabla_s(\mathbf{x})\sigma$; esses, por sua vez, podem ocorrer devido à variações de temperatura ou efeitos elétricos na superfície, por exemplo. Por fim, o terceiro termo representa uma diferença de tensões, também na direção normal, causada pela diferença líquida entre os pesos dos fluidos.

As Eqs. (2.41) e (2.42) são representações integrais para os campos velocidade e tensão na interface da gota e no contorno do fluido externo, $\Gamma_i(t)$ e $\Gamma_o(t)$, respectivamente. Alternativamente, essas equações podem ser interpretadas como um sistema de equações integrais acoplado entre velocidade e tensão nas fronteiras interna e externa do escoamento da fase contínua. Sendo assim, as condições de contorno sobre as paredes do canal, que podem ser de velocidade (condição de não deslizamento) e/ou de pressão (vazão de entrada e/ou saída do canal), aparecem naturalmente na formulação pela imposição de $\mathbf{u}_o(\mathbf{x}, t)$ e $\mathbf{t}_o(\mathbf{x}, t)$ sobre os pontos do contorno Γ_o .

2.8 Forma adimensional da representação integral

Finalmente, consideremos a adimensionalização do sistema de equações integrais para velocidade e tensão na interface da gota e na fronteira do domínio, dadas pelas Eqs. (2.41) e (2.42). Considerando os objetivos deste trabalho, desprezamos quaisquer mecanismos capazes provocar gradientes de tensão interfacial na superfície da gota, tais como variações de temperatura e efeitos elétricos. Com isso, não há salto de tensões na direção tangencial à interface da gota com o fluido ambiente. Desde que os dois fluidos possuem a mesma massa específica, despreza-se também os efeitos gravitacionais associados a um salto de tensões na direção normal. Com isso, o salto de tensões ocorre apenas na direção normal, decorrendo dos efeitos da tensão interfacial e da curvatura da superfície. Assim, a Eq. (2.43) é reduzida à Lei de Young-Laplace, tal que $\Delta \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \sigma \kappa(\mathbf{x}, t) \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}, t)$.

Sob essas circunstâncias, a adimensionalização do problema de um gota escoando através de um canal convergente é feita considerando que uma escala de tempo característica do escoamento é $\tau_\infty = H/U$, em que H é a altura da entrada do canal e U é a velocidade média na seção de entrada, respectivamente, e que uma escala de tempo de relaxação da gota é $\tau_\sigma = a\lambda\mu/\sigma$, em que a é o diâmetro inicial da gota, $\lambda\mu$ é a viscosidade da gota e σ é o coeficiente de tensão interfacial. Assim sendo, define-se as seguintes variáveis adimensionais: $\tilde{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{x}_0/H$, $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}/H$, $\tilde{\mathbf{u}}_i = \mathbf{u}_i/U$, $\tilde{\mathbf{u}}_o = \mathbf{u}_o/U$, $\tilde{\mathbf{t}}_o = H\mathbf{t}_o/\mu U$, $\tilde{\kappa} = a\kappa$, $\tilde{\mathcal{J}} = \mathcal{J}$, $\tilde{\mathcal{K}} = H\mathcal{K}$, $d\tilde{\Gamma} = d\Gamma/H$ sobre Γ_o e $d\tilde{\Gamma} = d\Gamma/a$ sobre $\Gamma_i(t)$, em que o til denota a variável adimensional. Dessa maneira, as Eqs. (2.41) e (2.42) podem ser reescritas como

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_0 \in \Gamma_i(\tilde{t}), \quad c(\tilde{\mathbf{x}}_0, \tilde{t})(\lambda + 1)U\tilde{\mathbf{u}}_i(\tilde{\mathbf{x}}_0, \tilde{t}) &= \frac{1}{4\pi}U \int_{\Gamma_o} \tilde{\mathcal{J}}(\tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{x}}_0) \cdot \tilde{\mathbf{t}}_o(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{t}) d\tilde{\Gamma}(\tilde{\mathbf{x}}) \\ &- \frac{1}{4\pi}U \int_{\Gamma_o} \tilde{\mathbf{u}}_o(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{t}) \cdot \tilde{\mathcal{K}}(\tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{x}}_0) \cdot \hat{\mathbf{n}}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{t}) d\tilde{\Gamma}(\tilde{\mathbf{x}}) \\ &+ \frac{1}{4\pi\mu}\sigma \int_{\Gamma_i(t)} \tilde{\mathcal{J}}(\tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{x}}_0) \cdot \tilde{\kappa}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{t})\hat{\mathbf{n}}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{t}) d\tilde{\Gamma}(\tilde{\mathbf{x}}) \\ &- \frac{1-\lambda}{4\pi}\frac{Ua}{H} \int_{\Gamma_i(t)} \tilde{\mathbf{u}}_i(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{t}) \cdot \tilde{\mathcal{K}}(\tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{x}}_0) \cdot \hat{\mathbf{n}}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{t}) d\tilde{\Gamma}(\tilde{\mathbf{x}}) \end{aligned} \quad (2.44)$$

e

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_0 \in \Gamma_o, \quad c(\tilde{\mathbf{x}}_0, \tilde{t})U\mathbf{u}_o(\tilde{\mathbf{x}}_0, \tilde{t}) &= \frac{1}{4\pi}U \int_{\Gamma_o} \tilde{\mathcal{J}}(\tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{x}}_0) \cdot \tilde{\mathbf{t}}_o(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{t}) d\tilde{\Gamma}(\tilde{\mathbf{x}}) \\ &- \frac{1}{4\pi}U \int_{\Gamma_o} \tilde{\mathbf{u}}_o(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{t}) \cdot \tilde{\mathcal{K}}(\tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{x}}_0) \cdot \hat{\mathbf{n}}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{t}) d\tilde{\Gamma}(\tilde{\mathbf{x}}) \\ &+ \frac{1}{4\pi\mu}\sigma \int_{\Gamma_i(t)} \tilde{\mathcal{J}}(\tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{x}}_0) \cdot \tilde{\kappa}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{t})\hat{\mathbf{n}}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{t}) d\tilde{\Gamma}(\tilde{\mathbf{x}}) \\ &- \frac{1-\lambda}{4\pi}\frac{Ua}{H} \int_{\Gamma_i(t)} \tilde{\mathbf{u}}_i(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{t}) \cdot \tilde{\mathcal{K}}(\tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{x}}_0) \cdot \hat{\mathbf{n}}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{t}) d\tilde{\Gamma}(\tilde{\mathbf{x}}). \end{aligned} \quad (2.45)$$

Isolando as velocidades $\tilde{\mathbf{u}}_i(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{t})$ e $\tilde{\mathbf{u}}_o(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{t})$ nas equações acima e descartando o uso do til para representar as variáveis adimensionais (para aliviar a notação do texto), obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_0 \in \Gamma_i(t), \quad c(\mathbf{x}_0, t)(\lambda + 1)\mathbf{u}_i(\mathbf{x}_0, t) &= \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_o} \mathcal{J}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{t}_o(\mathbf{x}, t) d\Gamma(\mathbf{x}) \\ &- \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_o} \mathbf{u}_o(\mathbf{x}, t) \cdot \mathcal{K}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}, t) d\Gamma(\mathbf{x}) \\ &+ \frac{1}{4\pi}Ca^{-1} \int_{\Gamma_i(t)} \mathcal{J}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \kappa(\mathbf{x}, t)\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}, t) d\Gamma(\mathbf{x}) \\ &- \frac{1-\lambda}{4\pi} \left(\frac{a}{H} \right) \int_{\Gamma_i(t)} \mathbf{u}_i(\mathbf{x}, t) \cdot \mathcal{K}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}, t) d\Gamma(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (2.46)$$

e

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_0 \in \Gamma_o, \quad c(\mathbf{x}_0, t) \mathbf{u}_o(\mathbf{x}_0, t) &= \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_o} \mathcal{J}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{t}_o(\mathbf{x}, t) d\Gamma(\mathbf{x}) \\
&- \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_o} \mathbf{u}_o(\mathbf{x}, t) \cdot \mathcal{K}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}, t) d\Gamma(\mathbf{x}) \\
&+ \frac{1}{4\pi} Ca^{-1} \int_{\Gamma_i(t)} \mathcal{J}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \kappa(\mathbf{x}, t) \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}, t) d\Gamma(\mathbf{x}) \\
&- \frac{1 - \lambda}{4\pi} \left(\frac{a}{H} \right) \int_{\Gamma_i(t)} \mathbf{u}_i(\mathbf{x}, t) \cdot \mathcal{K}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}, t) d\Gamma(\mathbf{x}).
\end{aligned} \tag{2.47}$$

Nas Eqs. (2.46) e (2.47) podemos identificar o número de capilaridade do escoamento, definido como $Ca = \mu U / \sigma$. Esse é o parâmetro de maior importância no estudo da reologia de emulsões, podendo ser interpretado como a razão entre as forças viscosas e as forças de superfície associadas à tensão interfacial e quantificando o quão forte é o escoamento que atua sobre a gota. Mais especificamente, o número de capilaridade é capaz de correlacionar a mecânica do escoamento macroscópico com a dinâmica na escala da gota (Oliveira, 2007). Por outro lado, o número de capilaridade ainda pode ser interpretado como a razão entre o tempo característico de relaxação da gota e o tempo característico do escoamento, já que $\tau_\sigma / \tau_\infty = \lambda(a/H)Ca$. Dessa maneira, fica clara a analogia entre o número de capilaridade e o número de Deborah (Bird et al., 1987). Esse último é um parâmetro central no estudo da reologia de soluções poliméricas, expressando a razão entre o tempo característico de relaxação do polímero e o tempo característico do escoamento não perturbado. Note que no limite $Ca \rightarrow \infty$, o terceiro termo do lado direito das Eqs. (2.46) e (2.47) tende a zero, de maneira que a influência dos efeitos da tensão interfacial no salto de tensões torna-se desprezível para o cálculo dos campos de velocidade. Continuando essa análise, a presença da razão de aspecto a/H na última integral dessas mesmas equações deixa clara a influência do tamanho e da viscosidade da gota no cálculo da velocidade. No caso limite em que $a \ll H$ essas parcelas tendem a zero, mostrando que a contribuição da viscosidade adicional causada pela presença das gotas no fluido base é irrelevante para os cálculos. Alternativamente, quando $\lambda \gg 1$, o último termo domina as equações, de modo que o efeito da viscosidade adicional torna-se predominante. Vale ressaltar que essa análise é feita para as integrais sobre o contorno $\Gamma_i(t)$ que define a superfície da gota, esclarecendo a influência dos fenômenos capilares e viscosos para os cálculos do campo de velocidade sobre sua superfície.

3 Metodologia numérica

Esse capítulo trata da metodologia numérica utilizada para resolver o problema do escoamento de uma gota de emulsão através de um canal convergente baseada no Método dos Elementos de Contorno. De início, apresenta-se uma visão geral do método, atentando para suas principais características e para as aproximações intrínsecas à sua formulação. Aborda-se também a geração da malha computacional, tanto para o contorno externo do canal quanto para a configuração circular inicial da gota, realizando uma análise do ponto de vista elementar, detalhando a utilização de elementos de contorno quadráticos contínuos e a interpolação dos campos desconhecidos com funções de forma sobre cada elemento. A metodologia de cálculo de elementos geométricos do contorno, como curvatura e vetor normal unitário também é apresentada. Por fim, destacamos o processo de discretização das equações integrais para os campos de velocidade e tensão no escoamento, escrevendo-as como um sistema linear e com as condições de contorno adequadamente impostas.

3.1 Visão geral do método

Desde a primeira publicação do livro de Brebbia (1978), o MEC tornou-se uma técnica bastante utilizada na solução numérica de equações diferenciais, sendo amplamente empregado na análise de diversos problemas de engenharia, incluindo modelos complexos de escoamentos em dinâmica dos fluidos (Kitagawa, 1990; Brebbia & Dominguez, 1992; Power & Wrobel, 1996). Uma condição necessária à implementação do MEC é a possibilidade de escrever a solução do problema como uma integral apenas no contorno de seu domínio. Dessa maneira, o método reduz a dimensão do problema abordado. De fato, para um problema tridimensional resolve-se apenas integrais de superfície, e para um problema bidimensional, apenas integrais de linha. Dessa maneira, os cálculos são realizados apenas no contorno do domínio, reduzindo consideravelmente o tamanho da malha e dispensando a discretização do domínio inteiro (o que é ideal para tratar de problemas em domínio infinito ou semi-infinito). Além do significativo avanço em termos de economia em tempo computacional nas simulações, esse procedimento faz com que o MEC lide muito melhor com problemas que apresentam superfícies deformáveis quando comparado a outros métodos numéricos tipicamente usados em problemas de engenharia, como o Método de Diferenças Finitas, o Método dos Elementos Finitos e o Método de Volumes Finitos. Sob essas circunstâncias, o ponto de partida para implementação do MEC ao problema aqui abordado são as expressões integrais que relacionam os campos de velocidade e tensão no contorno, dadas pelas Eqs. (2.41) e (2.42).

Em geral, o procedimento numérico baseia-se em dois tipos de aproximação. A primeira delas é uma aproximação puramente geométrica, de modo que o contorno Γ de uma região Ω é subdividido em N pequenas porções Γ_k , denominadas elementos de contorno. A Fig. 3 mostra um exemplo dessa aproximação geométrica.

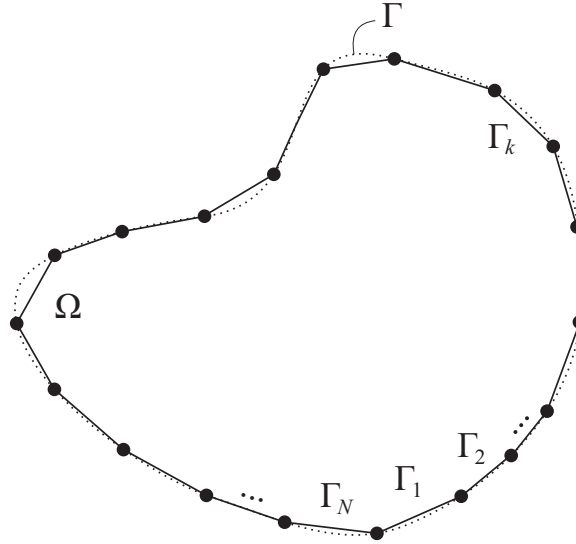


Figura 3 – Uma região plana Ω e seu contorno Γ aproximado por N elementos de contorno Γ_k .

As pequenas porções Γ_k que definem os elementos de contorno aproximam o contorno original através de formas conhecidas. Usualmente, utiliza-se funções polinomiais, como retas e parábolas. A aproximação consiste em escrever o contorno original Γ como o somatório de todos os elementos de contorno Γ_k , tal que

$$\Gamma \approx \sum_{k=1}^N \Gamma_k. \quad (3.1)$$

É evidente que aumentando a quantidade de elementos a aproximação torna-se cada vez melhor, fazendo com que os elementos de contorno Γ_k acompanhem o contorno original Γ de forma mais suave. Tomando o limite $N \rightarrow \infty$ na Eq. (3.1), a aproximação geométrica deve recuperar perfeitamente o contorno original.

A segunda aproximação, por sua vez, está relacionada ao cálculo das integrais no contorno Γ . Sendo assim, para uma função $f(\mathbf{x})$ qualquer segue que

$$\int_{\Gamma} f(\mathbf{x}) d\Gamma \approx \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} f(\mathbf{x}) d\Gamma_k, \quad (3.2)$$

em que a integral dentro do somatório é calculada sobre cada elemento Γ_k . Mais uma vez, no limite $N \rightarrow \infty$, a aproximação deve recuperar o resultado exato da integral sobre o contorno. Todavia, não sabemos como a função $f(\mathbf{x})$ varia dentro de cada elemento. Especificamente para problemas de dinâmica dos fluidos, não sabemos como os campos de velocidade e tensão,

$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ e $\mathbf{t}(\mathbf{x}, t)$, comportam-se dentro de cada elemento. Embora uma dessas duas grandezas seja sempre especificada pelas condições de contorno do problema, a outra permanece desconhecida, sendo uma incógnita a ser determinada. Então, esses campos são aproximados através da interpolação de funções polinomiais, comumente referenciadas como funções de forma, tendo seus valores fixados em cada nó dentro do elemento. O tipo de função de base é consequência direta do tipo de elemento utilizado na aproximação geométrica.

3.2 Geração da malha

No contexto do MEC, a malha computacional é responsável por determinar onde o contorno está situado no espaço, como ele é subdividido em elementos e como os nós estão dispostos dentro dos elementos. Para exemplificar a geração da malha no problema aqui abordado, consideremos a representação esquemática dada na Fig. 4 a seguir. Inicialmente, os dez pontos escuros maiores tem suas coordenadas fixadas no espaço, sendo oito no contorno do canal (vértices) e dois sobre a gota inicialmente circular (em pontos diametralmente opostos). Para gerar o contorno externo do canal, os pontos são ligados por segmentos de reta; no caso da gota, utiliza-se arcos de círculo cujo raio é metade da distância entre os pontos iniciais sobre sua superfície. A variação das dimensões do canal e do diâmetro inicial da gota é realizada alterando-se as coordenadas dos pontos inicialmente fixados no domínio. Com os contornos de interesse formados, cada um dos dez segmentos gerados é dividido em uma quantidade qualquer de elementos pela introdução da quantidade adequada de nós sobre eles, representados pelos pontos escuros menores. Conforme será abordado na Seção 3.3, adotamos elementos de contorno quadráticos contínuos, de modo que cada elemento seja formado por três nós.

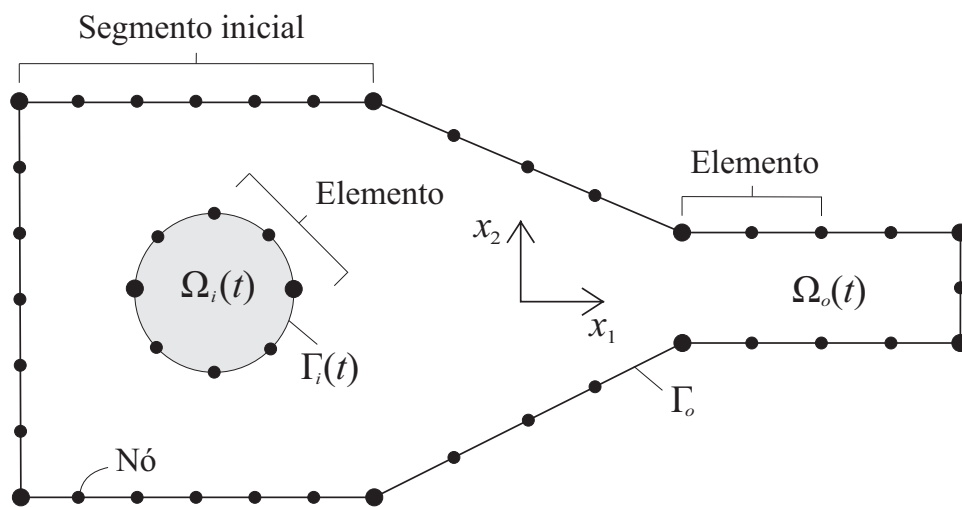


Figura 4 – Representação da discretização espacial do contorno no domínio computacional.

A numeração dos elementos começa no contorno do canal no canto inferior esquerdo e segue em sentido anti-horário, e continua para os elementos sobre a gota, dessa vez em sentido horário a partir do ponto inicial mais à esquerda. A ordenação dos elementos na malha é dada por matrizes de conectividade entre os elementos e nós vizinhos.

3.3 Ponto de vista elementar

Neste trabalho utiliza-se elementos de contorno quadráticos contínuos, de modo que cada elemento de contorno Γ_k seja descrito por um arco de parábola. Dessa forma, cada elemento deve conter 3 nós afim de definir uma equação polinomial de segundo grau interpoladora. Além disso, o número total de nós é igual a duas vezes o número total de elementos em contornos fechados. Esses pontos, \mathbf{x}_1 , \mathbf{x}_2 e \mathbf{x}_3 , são equidistantes, sendo mapeados nos pontos $\xi = -1$, $\xi = 0$ e $\xi = 1$, respectivamente, em que $\xi \in [-1, 1]$ é a coordenada local (ou elementar) adimensional. A Fig. 5 a seguir ilustra um elemento de contorno quadrático contínuo genérico Γ_k nos sistemas de coordenadas global e local.

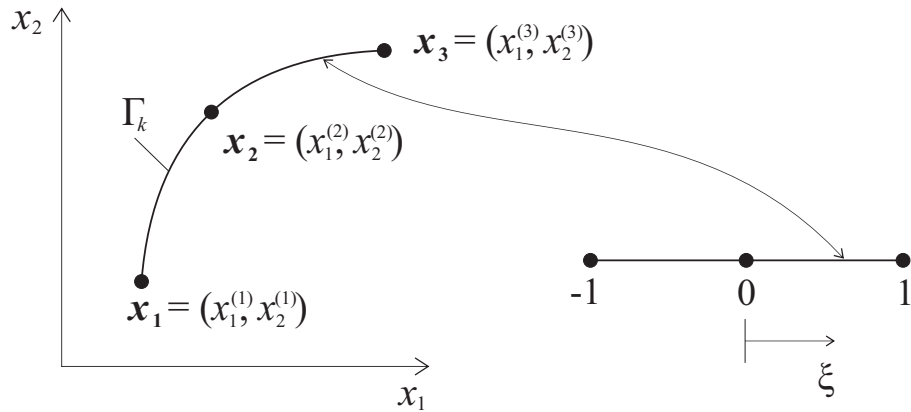


Figura 5 – Elemento de contorno quadrático contínuo com detalhes da representação nos sistemas de coordenadas global e local.

A coordenada x_1 de um ponto \mathbf{x} qualquer no elemento Γ_k é mapeada no sistema de coordenadas local através de um polinômio de segundo grau, tal que $x_1 = a\xi^2 + b\xi + c$, em que a , b e c são constantes que devem ser determinadas. Uma condição necessária ao mapeamento é tal que $x_1(\xi = -1) = x_1^{(1)}$, $x_1(\xi = 0) = x_1^{(2)}$ e $x_1(\xi = 1) = x_1^{(3)}$. O mesmo procedimento pode ser realizado para a coordenada x_2 . Sendo assim, resolvendo para x_1 e x_2 segue que

$$x_1 = N_1 x_1^{(1)} + N_2 x_1^{(2)} + N_3 x_1^{(3)} \quad (3.3)$$

e

$$x_2 = N_1 x_2^{(1)} + N_2 x_2^{(2)} + N_3 x_2^{(3)}, \quad (3.4)$$

ou ainda, na forma matricial,

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_1^{(3)} \\ x_2^{(3)} \end{Bmatrix} = \mathbf{N}(\xi) \cdot \mathbf{x}_{(n)}, \quad (3.5)$$

em que $\mathbf{x}_{(n)}$ é o vetor com os valores nodais dos pontos \mathbf{x}_1 , \mathbf{x}_2 e \mathbf{x}_3 . Aqui, $N_1 = N_1(\xi)$, $N_2 = N_2(\xi)$ e $N_3 = N_3(\xi)$ são funções quadráticas na coordenada local ξ , sendo comumente referenciadas como funções de forma. Sendo assim, $\mathbf{N}(\xi)$ é uma matriz 6×2 cujas entradas não nulas são as funções de forma adequadamente organizadas. Explicitando as funções de forma, obtemos

$$N_1 = \frac{\xi}{2}(\xi - 1), \quad (3.6)$$

$$N_2 = (1 - \xi)(1 + \xi) \quad (3.7)$$

e

$$N_3 = \frac{\xi}{2}(\xi + 1). \quad (3.8)$$

A representação gráfica das funções de forma em cada elemento é mostrada na Fig. 6 a seguir.

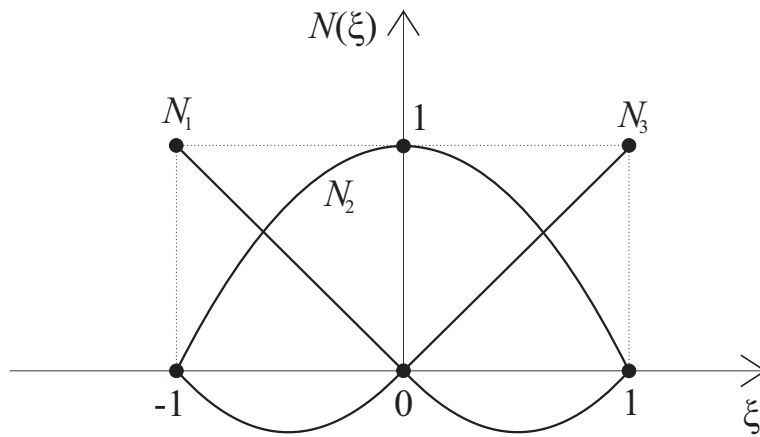


Figura 6 – Funções de forma quadráticas contínuas $N_1(\xi)$, $N_2(\xi)$ e $N_3(\xi)$ em cada elemento.

Dessa maneira, a relação entre elementos diferenciais de comprimento do contorno nas duas coordenadas é $d\Gamma = J(\xi)d\xi$, em que $J(\xi) = \sqrt{(dx_1/d\xi)^2 + (dx_2/d\xi)^2}$ é o Jacobiano da transformação de coordenadas do sistema global para o sistema local.

O mesmo procedimento realizado para um ponto \mathbf{x} qualquer sobre um elemento Γ_k também pode ser aplicado aos campos de velocidade e tensão, $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ e $\mathbf{t}(\mathbf{x}, t)$. Dessa forma,

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \begin{Bmatrix} u_1(\mathbf{x}, t) \\ u_2(\mathbf{x}, t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{(1)}(t) \\ u_2^{(1)}(t) \\ u_1^{(2)}(t) \\ u_2^{(2)}(t) \\ u_1^{(3)}(t) \\ u_2^{(3)}(t) \end{Bmatrix} = \mathbf{N}(\xi) \cdot \mathbf{u}_{(n)}(t) \quad (3.9)$$

e

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t) = \begin{Bmatrix} t_1(\mathbf{x}, t) \\ t_2(\mathbf{x}, t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_1^{(1)}(t) \\ t_2^{(1)}(t) \\ t_1^{(2)}(t) \\ t_2^{(2)}(t) \\ t_1^{(3)}(t) \\ t_2^{(3)}(t) \end{Bmatrix} = \mathbf{N}(\xi) \cdot \mathbf{t}_{(n)}(t). \quad (3.10)$$

Analogamente, $\mathbf{u}_{(n)}(t)$ e $\mathbf{t}_{(n)}(t)$ são vetores contendo os valores nodais de velocidade e tensão em um dado instante de tempo.

3.4 Elementos geométricos do contorno

Como descrito pelas Eqs. (2.41) e (2.42), a forma integral da relação entre os campos de velocidade e tensão nos contornos Γ_o e $\Gamma_i(t)$ requer o conhecimento de elementos geométricos de cada um deles. Mais especificamente, para cada ponto sobre o contorno, é necessário determinar a curvatura e o vetor normal unitário para então calcular os campos desconhecidos. No contexto do MEC, essas grandezas são calculadas de forma local dentro de cada elemento. Como consequência da utilização de elementos quadráticos contínuos, tanto a curvatura quanto o vetor normal variam ao longo de cada elemento, sendo função da variável local ξ .

No caso de domínios bidimensionais, o vetor tangente unitário ao contorno em um ponto $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ é dado por $\hat{\mathbf{t}}(\mathbf{x}, t) = (dx_1^2 + dx_2^2)^{-1/2}(dx_1\hat{\mathbf{e}}_1 + dx_2\hat{\mathbf{e}}_2)$. Assim, a correspondência para o sistema de coordenadas local é feita como (Konyukhov & Izi, 2015)

$$\hat{\mathbf{t}}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{J} \frac{d\mathbf{N}}{d\xi} \cdot \mathbf{x}_{(n)}(t), \quad (3.11)$$

em que $J = J(\xi)$ é o Jacobiano da transformação de coordenadas, $\mathbf{N} = \mathbf{N}(\xi)$ é matriz com as funções de forma e $\mathbf{x}_{(n)}(t)$ é o vetor com as posições nodais. O vetor normal unitário ao

contorno $\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}, t)$ é obtido indiretamente a partir das componentes do vetor tangente unitário $\hat{\mathbf{t}}(\mathbf{x}, t)$. De fato, $\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}, t)$ é sempre ortogonal a $\hat{\mathbf{t}}(\mathbf{x}, t)$, de maneira que $\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}, t) \cdot \hat{\mathbf{t}}(\mathbf{x}, t) = 0$. Consequentemente, segue que $\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}, t) = \pm t_2 \hat{\mathbf{e}}_1 + \mp t_1 \hat{\mathbf{e}}_2$. A escolha dos sinais das componentes do vetor normal é tal que $\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}, t)$ sempre aponte para o exterior do contorno.

Ainda considerando problemas bidimensionais, a curvatura local do contorno é uma medida do quanto ele desvia-se de uma geometria retilínea. A curvatura sobre de uma curva parametrizada pode ser calculada por:

$$\kappa = \frac{|x'_1 x''_2 - x'_2 x''_1|}{(x'^2_1 + x'^2_2)^{3/2}}. \quad (3.12)$$

Dessa maneira, todas as propriedades geométricas de interesse são funções apenas do mapeamento entre os sistemas de coordenadas local e global. Dado um ponto \mathbf{x} qualquer no contorno, calcula-se $\hat{\mathbf{t}}(\mathbf{x}, t)$, $\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}, t)$ e $\kappa(\mathbf{x}, t)$ a partir apenas das funções de forma utilizadas no mapeamento. Caso o lado côncavo da curva esteja no exterior do domínio, a curvatura κ é calculada da mesma forma, diferindo apenas pelo sinal.

3.5 Discretização das equações integrais no contorno

O procedimento de discretização das representações integrais para velocidade e tensão no contorno consiste em escrever as integrais sobre os contornos $\Gamma_i(t)$ e Γ_o como somatórios finitos de integrais realizadas sobre cada elemento de contorno. Nesse sentido, a interface da gota $\Gamma_i(t)$ é subdividida em N_i elementos $\Delta\Gamma_i^n$, enquanto o contorno externo do canal Γ_o é subdividido em N_o elementos $\Delta\Gamma_o^n$. Dessa forma, a Eq. (2.41) é reescrita de forma discreta como

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_0 \in \Gamma_i(t), \quad c(\mathbf{x}_0)(\lambda + 1)\mathbf{u}_i(\mathbf{x}_0, t) &= \frac{1}{4\pi\mu} \sum_{n=1}^{N_o} \int_{\Delta\Gamma_o^n} \mathcal{J}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{t}_o(\mathbf{x}, t) d\Gamma \\ &- \frac{1}{4\pi} \sum_{n=1}^{N_o} \int_{\Delta\Gamma_o^n} \mathbf{u}_o(\mathbf{x}, t) \cdot \mathcal{K}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}, t) d\Gamma \\ &+ \frac{1}{4\pi\mu} \sum_{n=N_o+1}^{N_o+N_i} \int_{\Delta\Gamma_i^n} \mathcal{J}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \Delta\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) d\Gamma \\ &- \frac{1-\lambda}{4\pi} \sum_{n=N_o+1}^{N_o+N_i} \int_{\Delta\Gamma_i^n} \mathbf{u}_i(\mathbf{x}, t) \cdot \mathcal{K}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}, t) d\Gamma. \end{aligned} \quad (3.13)$$

E de forma semelhante para a Eq. (2.47),

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_0 \in \Gamma_o, \quad c(\mathbf{x}_0)\mathbf{u}_o(\mathbf{x}_0, t) &= \frac{1}{4\pi\mu} \sum_{n=1}^{N_o} \int_{\Delta\Gamma_o^n} \mathcal{J}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{t}_o(\mathbf{x}, t) d\Gamma \\
&- \frac{1}{4\pi} \sum_{n=1}^{N_o} \int_{\Delta\Gamma_o^n} \mathbf{u}_o(\mathbf{x}, t) \cdot \mathcal{K}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}, t) d\Gamma \\
&+ \frac{1}{4\pi\mu} \sum_{n=N_o+1}^{N_o+N_i} \int_{\Delta\Gamma_i^n} \mathcal{J}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \Delta\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) d\Gamma \\
&- \frac{1-\lambda}{4\pi} \sum_{n=N_o+1}^{N_o+N_i} \int_{\Delta\Gamma_i^n} \mathbf{u}_i(\mathbf{x}, t) \cdot \mathcal{K}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}, t) d\Gamma.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Sendo assim, dado um ponto fonte \mathbf{x}_0 sobre o contorno, os termos de somatório computam a influência de todos os outros pontos do contorno, incluindo o próprio \mathbf{x}_0 , no cálculo dos campos de velocidade e tensão. Como consequência da utilização de elementos quadráticos contínuos, a curvatura local e o vetor normal, inclusos no cálculo do salto de tensão $\Delta\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$, variam ao longo de cada elemento, sendo mantidos dentro das integrais. Essa formulação representa um grande avanço em relação ao trabalho original de Khayat et al. (1997), já que na ocasião os autores utilizaram elementos de contorno constantes. Procedendo dessa forma, cada elemento continha apenas um nó central, permitindo considerar como constantes as propriedades geométricas dos contornos dentro dos elementos.

Retomando o modelo constitutivo para o salto de tensões na interface, tal que $\Delta\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = 2\sigma\kappa(\mathbf{x}, t)\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}, t)$, e usando a expansão dos campos de velocidade e tensão em termos de funções de forma sobre cada elemento, como indicam as Eqs. (3.9) e (3.10), as Eqs. (3.13) e (3.14) podem ser reescritas, já de forma adimensional, como

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_m \in \Gamma_i(t), \quad c^m(\lambda + 1)\mathbf{u}_i^m(t) &= \frac{1}{4\pi} \sum_{n=1}^{N_o} \left(\int_{\Delta\Gamma_o^n} \mathcal{J}^{mn} \cdot \mathbf{N}(\xi) d\Gamma \right) \cdot \mathbf{t}_{o(n)}(t) \\
&- \frac{1}{4\pi} \sum_{n=1}^{N_o} \left(\int_{\Delta\Gamma_o^n} \mathcal{K}^{mn} \cdot \hat{\mathbf{n}}^n(\xi, t) \cdot \mathbf{N}(\xi) d\Gamma \right) \cdot \mathbf{u}_{o(n)}(t) \\
&+ \frac{1}{4\pi} Ca^{-1} \sum_{n=N_o+1}^{N_o+N_i} \left(\int_{\Delta\Gamma_i^n} \mathcal{J}^{mn} \cdot \kappa^n(\xi, t) \hat{\mathbf{n}}^n(\xi, t) d\Gamma \right) \\
&- \frac{1-\lambda}{4\pi} \left(\frac{a}{H} \right) \sum_{n=N_o+1}^{N_o+N_i} \left(\int_{\Delta\Gamma_i^n} \mathcal{K}^{mn} \cdot \hat{\mathbf{n}}^n(\xi, t) \cdot \mathbf{N}(\xi) d\Gamma \right) \cdot \mathbf{u}_{i(n)}(t)
\end{aligned} \tag{3.15}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_m \in \Gamma_o, \quad c^m \mathbf{u}_o^m(t) &= \frac{1}{4\pi} \sum_{n=1}^{N_o} \left(\int_{\Delta\Gamma_o^n} \mathcal{J}^{mn} \cdot \mathbf{N}(\xi) d\Gamma \right) \cdot \mathbf{t}_{o(n)}(t) \\
&- \frac{1}{4\pi} \sum_{n=1}^{N_o} \left(\int_{\Delta\Gamma_o^n} \mathcal{K}^{mn} \cdot \hat{\mathbf{n}}^n(\xi, t) \cdot \mathbf{N}(\xi) d\Gamma \right) \cdot \mathbf{u}_{o(n)}(t) \\
&+ \frac{1}{4\pi} C a^{-1} \sum_{n=N_o+1}^{N_o+N_i} \left(\int_{\Delta\Gamma_i^n} \mathcal{J}^{mn} \cdot \kappa^n(\xi, t) \hat{\mathbf{n}}^n(\xi, t) d\Gamma \right) \\
&- \frac{1-\lambda}{4\pi} \left(\frac{a}{H} \right) \sum_{n=N_o+1}^{N_o+N_i} \left(\int_{\Delta\Gamma_i^n} \mathcal{K}^{mn} \cdot \hat{\mathbf{n}}^n(\xi, t) \cdot \mathbf{N}(\xi) d\Gamma \right) \cdot \mathbf{u}_{i(n)}(t).
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Aqui, os sobrescritos m e n indicam que as funções são avaliadas nos pontos \mathbf{x}_m e \mathbf{x}_n , respectivamente. Assim, dado um ponto fonte \mathbf{x}_m , computa-se a influência de todos os pontos \mathbf{x}_n sobre o contorno, inclusive \mathbf{x}_m , nos cálculos de $\mathbf{u}^m(t)$ e $\mathbf{t}^m(t)$. As Eqs. (3.15) e (3.16) representam um sistema linear nas variáveis $\mathbf{u}^m(t)$ e $\mathbf{t}^m(t)$ sobre o contorno, podendo ser reescrito de forma mais compacta como $\mathbf{H} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{T} + \mathbf{B}$, em que \mathbf{H} e \mathbf{G} são matrizes com os coeficientes do sistema, \mathbf{U} e \mathbf{T} são vetores contendo os valores desconhecidos de velocidade e tensão, respectivamente, e \mathbf{B} é um vetor independente associado ao salto de tensão na interface da gota. Para o sistema compacto temos que

$$\mathbf{H}_{mn}(t) = \begin{cases} c^m \delta_{mn} + \frac{1}{4\pi} \int_{\Delta\Gamma_o^n} \mathcal{K}^{mn} \cdot \hat{\mathbf{n}}^n(\xi, t) \cdot \mathbf{N}(\xi) d\Gamma, & n \in [1, N_o]; \\ c^m(\lambda + 1) \delta_{mn} + \frac{1-\lambda}{4\pi} \left(\frac{a}{H} \right) \int_{\Delta\Gamma_i^n} \mathcal{K}^{mn} \cdot \hat{\mathbf{n}}^n(\xi, t) \cdot \mathbf{N}(\xi) d\Gamma, & \\ n \in [N_o + 1, N_o + N_i]; \end{cases} \tag{3.17}$$

$$\mathbf{G}_{mn} = \begin{cases} \frac{1}{4\pi} \int_{\Delta\Gamma_o^n} \mathcal{J}^{mn} \cdot \mathbf{N}(\xi) d\Gamma, & n \in [1, N_o]; \\ \mathbf{0}, & n \in [N_o + 1, N_i + N_o]; \end{cases} \tag{3.18}$$

e

$$\mathbf{B}_{mn}(t) = \begin{cases} \mathbf{0}, & n \in [1, N_o]; \\ \frac{1}{4\pi} C a^{-1} \int_{\Delta\Gamma_i^n} \mathcal{J}^{mn} \cdot \kappa^n(\xi, t) \hat{\mathbf{n}}^n(\xi, t) d\Gamma, & \\ n \in [N_o + 1, N_i + N_o]; \end{cases} \tag{3.19}$$

em que m é o contador global para varrer todo os nós sobre os contornos $\Gamma_i(t)$ e Γ_o , e δ_{mn} é o operador Delta de Kronecker (Aris, 1962).

Finalmente, o sistema linear dado pelas Eqs. (3.16) e (3.15) pode ser expresso como

$$\sum_{n=1}^{N_o+N_i} \mathbf{H}_{mn}(t) \cdot \mathbf{u}_{(n)}(t) = \sum_{n=1}^{N_o+N_i} \mathbf{G}_{mn} \cdot \mathbf{t}_{(n)}(t) + \sum_{n=1}^{N_o+N_i} \mathbf{B}_{mn}(t), \quad (3.20)$$

em que $\mathbf{u}_{(n)}(t) = \mathbf{u}_{o(n)}(t)$ e $\mathbf{t}_{(n)}(t) = \mathbf{t}_{o(n)}(t)$ para $n \in [1, N_o]$ e $\mathbf{u}_{(n)}(t) = \mathbf{u}_{i(n)}(t)$ e $\mathbf{t}_{(n)}(t) = \mathbf{t}_{i(n)}(t)$ para $n \in [N_o+1, N_o+N_i]$. Vale notar que os coeficientes de \mathbf{H} e \mathbf{B} são funções explícitas do tempo, enquanto os termos de \mathbf{G} são constantes. O sistema dado pela Eq. (3.20) é resolvido para obter os valores desconhecidos de velocidade e tensão sobre os contornos $\Gamma_i(t)$ e Γ_o . Os escoamentos dentro e fora da gota (isto é, os resultados para pontos no interior do domínio) são recuperados simplesmente pela substituição dos valores obtidos para velocidade e tensão no contorno nas Eqs. (2.39) e (2.40).

3.6 Integração numérica

As entradas das matrizes \mathbf{H} e \mathbf{G} e do vetor \mathbf{B} que definem o sistema linear a ser resolvido para $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ e $\mathbf{t}(\mathbf{x}, t)$ devem ser calculadas de forma local sobre cada elemento de contorno. Fazendo a correspondência entre as coordenadas global e local para cada elemento de contorno $\Delta\Gamma^n$, as Eqs. (3.17), (3.18) e (3.19) podem ser reescritas como

$$\mathbf{H}_{mn}(t) = \begin{cases} c^m \delta_{mn} + \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \boldsymbol{\kappa}^{mn} \cdot \hat{\mathbf{n}}^n(\xi, t) \cdot \mathbf{N}(\xi) J(\xi) d\xi, & n \in [1, N_o]; \\ c^m(\lambda + 1) \delta_{mn} + \frac{1 - \lambda}{4\pi} \left(\frac{a}{H} \right) \int_{-1}^1 \boldsymbol{\kappa}^{mn} \cdot \hat{\mathbf{n}}^n(\xi, t) \cdot \mathbf{N}(\xi) J(\xi) d\xi, & n \in [N_o + 1, N_o + N_i], \end{cases} \quad (3.21)$$

$$\mathbf{G}_{mn} = \begin{cases} \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \boldsymbol{\mathcal{J}}^{mn} \cdot \mathbf{N}(\xi) J(\xi) d\xi, & n \in [1, N_o]; \\ \mathbf{0}, & n \in [N_o + 1, N_o + N_i], \end{cases} \quad (3.22)$$

e

$$\mathbf{B}_{mn}(t) = \begin{cases} \mathbf{0}, & n \in [1, N_o]; \\ \frac{1}{4\pi} C a^{-1} \int_{-1}^1 \boldsymbol{\mathcal{J}}^{mn} \cdot \boldsymbol{\kappa}^n(\xi, t) \hat{\mathbf{n}}^n(\xi, t) J(\xi) d\xi, & n \in [N_o + 1, N_o + N_i], \end{cases} \quad (3.23)$$

em que \mathbf{x}_m é a coordenada global de um nó no elemento $\Delta\Gamma^n$ e \mathbf{x}_n é obtido localmente pela expansão em funções de forma, como descrito pela Eq. (3.5).

Neste trabalho, as integrais regulares são calculadas numericamente utilizando o Método de Quadratura de Gauss com 8 pontos de interpolação (Stroud & Secrest, 1966). As integrais de \mathcal{J}^{mn} apresentam singularidades fracas do tipo $\mathcal{O}(\log r^{-1})$ e são tratadas com o Método de Quadratura Logarítmica de Gauss, também com 10 pontos de interpolação (Telles, 1987). Por outro lado, as integrais de \mathcal{K}^{mn} apresentam singularidades fortes do tipo $\mathcal{O}(1/r)$ e são calculadas de forma indireta com um procedimento típico de algoritmos baseados no MEC (Brebbia & Dominguez, 1992). Para tanto, suponha, sem perda de generalidade, um escoamento em que a velocidade é igual a unidade em todos os nós do contorno em uma direção e zero na outra. Consequentemente, a tensão é identicamente nula em todos os nós. Com isso, temos que

$$\mathbf{H}\mathbf{u}^q = 0, \quad (3.24)$$

em que \mathbf{u}^q é um vetor contendo as velocidades unitárias ao longo da direção $\hat{\mathbf{e}}_q$ e zero na outra. Para satisfazer a Eq. (3.24) é necessário que

$$H_{ii} = - \sum_{j=1}^N H_{ij}, \quad j \neq i, \quad (3.25)$$

sendo j par ou ímpar. A Eq. (3.25) mostra que o termo singular da diagonal principal de \mathbf{H} é igual a soma de todos os outros termos fora da diagonal principal correspondentes ao mesmo grau de liberdade.

3.7 Condições de contorno

No contexto do MEC, as condições de contorno são impostas aos nós decorrentes da discretização do contorno. Em cada nó impõe-se uma condição de velocidade ou tensão, mas nunca as duas. Dada uma condição de contorno em uma dessas variáveis, a outra é obtida pela solução numérica do problema. A Fig. 7 a seguir mostra um esquema das condições de contorno aqui utilizadas.

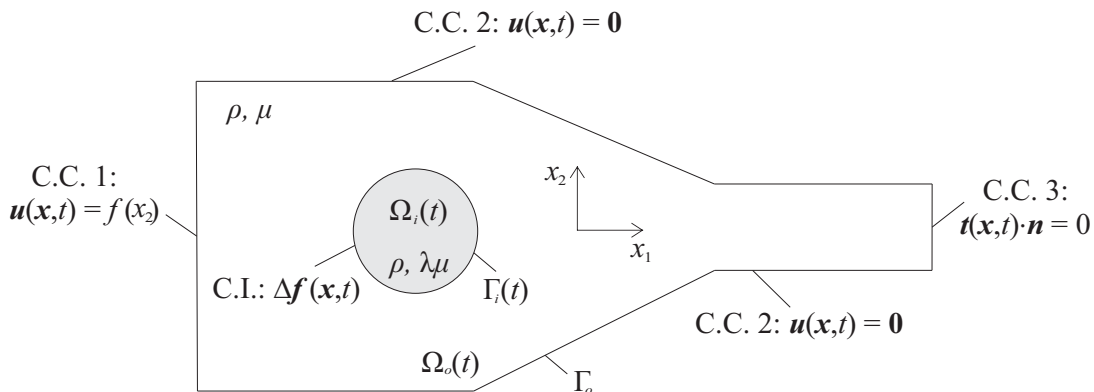


Figura 7 – Representação esquemática das condições de contorno utilizadas no problema.

Seguindo a Fig. 7, as condições de contorno são:

1. seção de entrada: condição de velocidade prescrita. Aqui, impõe-se um perfil de velocidade parabólico do escoamento desenvolvido em um canal de placas paralelas, tal que $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = f(x_2)$, como descrito pela Eq. (2.6);
2. paredes laterais: condição de não-deslizamento. O fluido adere às paredes do contorno sólido do canal e impomos $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0}$, já que supostamente o canal permanece em repouso em relação ao fluido;
3. seção de saída: condição de pressão prescrita. Por simplicidade, a pressão de saída do escoamento é supostamente nula, isto é, $p(\mathbf{x}, t) = \mathbf{t}(\mathbf{x}, t) \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$, em que $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{e}}_1$;
4. interface da gota: condição de salto de tensões. Essa é uma condição de interface descrita pelo salto de tensões na direção normal seguindo a Lei de Young-Laplace, tal que $\Delta \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = 2\sigma\kappa(\mathbf{x}, t)\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}, t)$.

3.8 Evolução da superfície da gota

Ainda que a dependência temporal não tenha sido levada em conta explicitamente nas equações de Stokes para a derivação da representação integral do escoamento, mudanças na configuração da superfície da gota devem ser consideradas. De fato, o escoamento em si e a geometria do canal são responsáveis por alterar continuamente a topologia da gota, que deforma-se continuamente com a velocidade da interface $\mathbf{u}_i(\mathbf{x}, t)$. Sabendo que o tempo característico de propagação de vorticidade (ou de quantidade de movimento) é muito menor que o tempo característico de mudanças na configuração da superfície da gota, a condição limite de *quasi*-estacionaridade é satisfeita, conforme discutido na Seção 2.3. Assim, o escoamento é sempre permanente com relação à configuração instantânea do contorno da gota. Nessa situação, as mudanças na forma da superfície podem ser determinadas pela relação cinemática evolutiva

$$\frac{d\mathbf{x}_0}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{x}_0, t), \quad (3.26)$$

em que $\mathbf{x}_0 \in \Gamma_i(t)$. Essa evolução ocorre em um contexto de variações transientes virtuais ou *quasi*-estáticas da posição das partículas na interface e reduz a não linearidade intrínseca de um problema de superfície livre e/ou deformável. Em termos físicos, essa condição significa que todo o fluido ajusta-se imediatamente às mudanças de localização das partículas sobre a superfície da gota devido à rápida difusão de vorticidade pelo meio quando comparada com seu tempo de relaxação.

Considerando que cada nó sobre a gota pode ser tratado como uma partícula independente, o deslocamento de cada uma dessas partículas entre dois instantes de tempo consecutivos é obtido pelo Método de Euler de primeira ordem explícito.

3.9 Cálculo da vazão e área da gota

A condição de incompressibilidade e conservação da massa são intrínsecos aos fluidos presentes no problema. Com isso, a vazão nas seções de entrada e saída do canal devem ser iguais, bem como, a área da gota (problema 2D) deve ser conservada ao longo de todo o seu percurso. Em todos os instantes são calculadas a vazão na saída do canal e a área da gota. Esses dois parâmetros são usados para a verificação da precisão do método.

A vazão na saída do canal é calculada por meio de uma integração numérica trapezoidal, enquanto a vazão na entrada é obtida analiticamente pelo produto da altura do canal pela velocidade média na seção da entrada (condição de contorno).

Para o cálculo da área de gota, utiliza-se a integral de contorno apresentada na Eq. (3.27), assim como sugerido por (Wrobel et al., 2009). Essa integração é obtida numericamente por uma simples soma de Riemman.

$$\frac{1}{2} \int_S \mathbf{x} \cdot \mathbf{n} \, dS. \quad (3.27)$$

4 Validação do método

Esse capítulo tem por finalidade validar o método apresentando e discutindo resultados obtidos com um código preliminar desenvolvido ¹. Esse código possibilita a simulação de escoamentos em torno de contornos sólidos. Para tanto, consideramos a solução numérica baseada no Método dos Elementos de Contorno para três escoamentos permanentes em regimes de baixos números de Reynolds, a saber: (i) escoamento entre placas planas e paralelas causado por diferença de pressão; (ii) escoamento em torno de um cilindro; e (iii) escoamento gerado pela rotação de um cilindro imerso em um fluido inicialmente em repouso. Como critério de comparação e para fins de validação do código, utiliza-se referências e resultados qualitativos e quantitativos clássicos disponíveis na literatura.

4.1 Escoamento entre placas paralelas

O perfil de velocidade de um escoamento entre placas planas e paralelas causado por diferença de pressão é apresentado de forma qualitativa no diagrama da Fig. 8 a seguir. O perfil de entrada é imposto como uma condição de contorno. Nesse caso, utiliza-se o perfil parabólico proposto por Poiseuille para esse caso, como descreve a Eq. (2.6). Os parâmetros adotados foram $U = 10^{-4}$ m/s para velocidade média, $\mu = 10^{-3}$ Pa·s para viscosidade do fluido e $H = 100$ μ m e $L = 300$ μ m para a altura de entrada e comprimento do canal, respectivamente. Como pode ser observado, o resultado numérico mostra-se bastante coerente. O perfil de velocidade permanece praticamente constante e igual ao inicial, mantendo-se desenvolvido e com formato parabólico ao longo de todo o escoamento.

Uma análise quantitativa desse resultado pode ser obtida verificando-se a validade do princípio de conservação da massa no escoamento. Sendo o fluido incompressível, a vazão volumétrica do escoamento deve ser conservada ao longo do escoamento. Em outras palavras, o perfil de velocidade imposto como condição de contorno de entrada deve ser recuperado de forma idêntica em todas as seções entre as placas, especialmente na saída do canal. Assim, para $U = 10^{-4}$ m/s e $H = 100$ μ m, a vazão por unidade de largura do canal, $Q = 10^{-8}$ m²/s, deve ser mantida constante. Nesse sentido, integra-se numericamente a componente horizontal do vetor velocidade (isto é, na direção \hat{e}_1) ao longo da seção de saída. A Fig. 9 a seguir mostra os resultados obtidos tanto para o desvio relativo associado ao cálculo da vazão na seção de saída, ε , quanto para o tempo de execução das simulações, t_c , ambos em função do refinamento da malha, dado pela quantidade N_s de elementos por segmento do contorno.

¹ Trata-se de um *homemade code* baseado no MEC escrito em linguagem MATLAB[®].

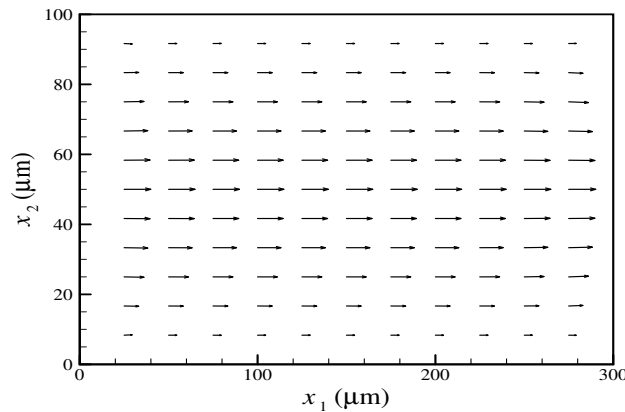


Figura 8 – Perfil de velocidade ao longo do escoamento entre placas planas e paralelas causado por gradiente de pressão.

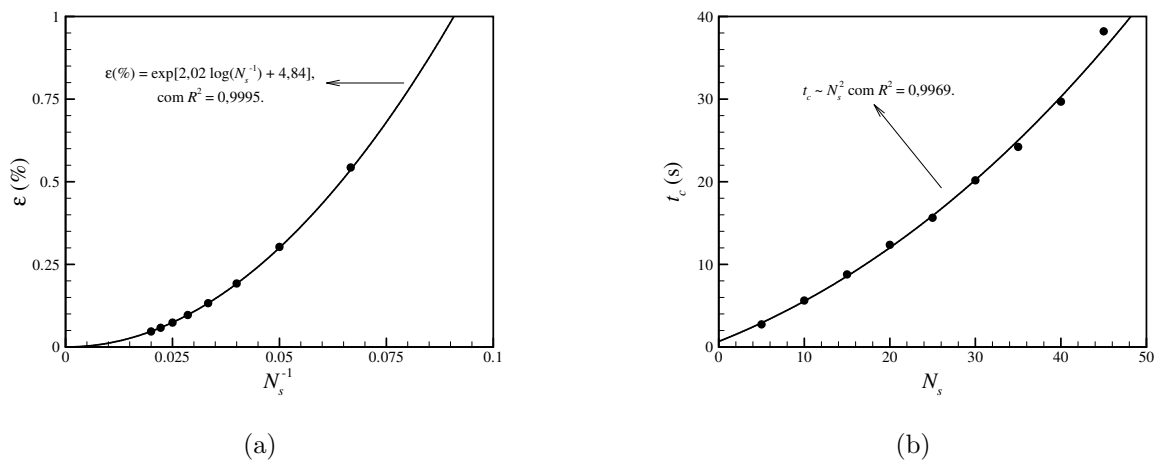


Figura 9 – Resultados para o escoamento entre placas planas e paralelas causado por gradiente de pressão. Em (a), o desvio cometido no cálculo da vazão na seção de saída em função do refinamento da malha; em (b), o custo computacional das simulações em função do refinamento da malha.

De acordo com a Fig. 9(a), o desvio entre os resultados numérico e previsto cai de forma praticamente exponencial à medida que a malha é refinada (o coeficiente de correlação da curva de ajuste é $R^2 \approx 1$). Quando $N_s = 40$ é o número de elementos em cada lado do canal (fazendo com que a malha contenha 160 elementos no total), por exemplo, esse desvio é inferior a 0,075%. É notável que o limite em que $N_s \rightarrow \infty$ (ou $N_s^{-1} \rightarrow 0$), temos que $\varepsilon \rightarrow 0$, mostrando que o programa recupera bem o resultado das previsões teóricas quando a malha é refinada de forma consistente. Além disso, aumentar a quantidade de elementos a partir de determinado valor causa um impacto muito maior no custo computacional das simulações do que na precisão de seus resultados. De fato, a Fig. 9(b) mostra que o tempo de execução do programa aumenta de forma praticamente quadrática com a quantidade de elementos na malha.

Outro resultado quantitativo importante consiste em verificar a queda de pressão no escoamento. Sob as condições assumidas até aqui, $-\partial P/\partial x_1 = G$ e $\partial P/\partial x_2 = 0$, em que $G = 12\mu Q/H^3$ é o negativo do gradiente de pressão na direção \hat{e}_1 , supostamente constante. Isto é, a pressão permanece constante ao longo de cada seção entre as placas, variando de forma linear desde P_0 , na seção de entrada, até P_L , na seção de saída. Como condição de contorno, impõe-se $P_L = 0$, de maneira que o resultado para $P_0 > 0$ deve ser recuperado pelo programa. O acesso ao campo de pressão pelo MEC é obtido simplesmente tomando a componente normal do vetor tensão em cada ponto. A Fig. 10 a seguir traz os resultados obtidos para o campo de pressão utilizando uma malha com $N_s = 40$ elementos em cada lado do canal. A Fig. 10(a) mostra a pressão P ao longo de cada seção $x_1 \in [0, L]$ entre as placas. Adicionalmente, a Fig. 10(b) apresenta um mapa de cores para a pressão no domínio do escoamento. Nesse caso, a pressão é maior nas regiões de cores mais quentes (tons de vermelho), e menor nas regiões de cores mais frias (tons de azul).

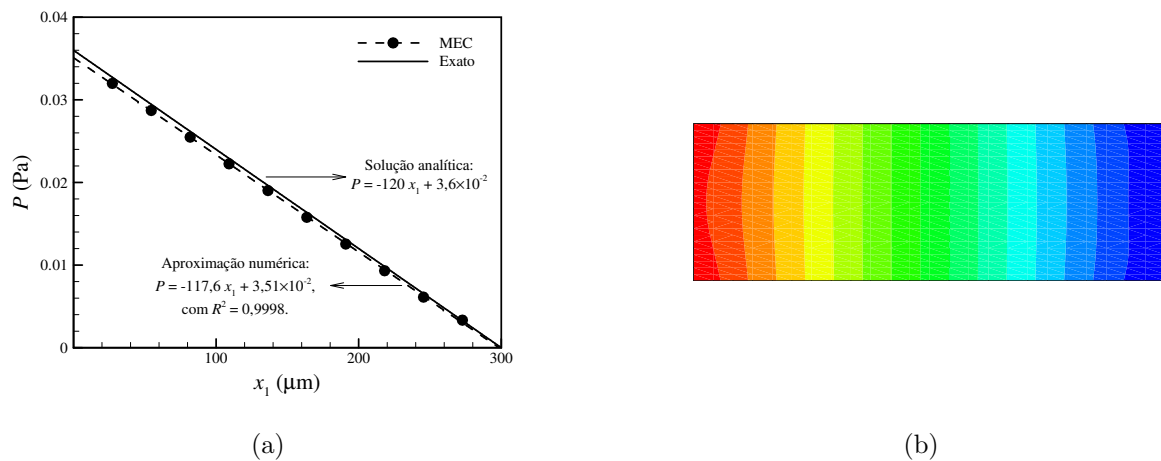


Figura 10 – Resultados para o campo de pressão no escoamento entre placas planas e paralelas causado por gradiente de pressão. Em (a), queda de pressão desde a seção de entrada até a seção de saída; em (b), mapa de cor do campo de pressão.

Seguindo a Fig. 10(a), o programa recupera de forma consistente a queda linear de pressão entre as seções de entrada e saída prevista pela solução analítica de Hagen-Poiseuille (note que o coeficiente de correlação da reta de ajuste é $R^2 \approx 1$). A queda de pressão também é bem representada pelo mapa de cor da Fig. 10(b). É notável que os maiores desvios entre as soluções numérica e analítica ocorrem nas proximidades da seção de entrada no canal, decrescendo à medida que o escoamento avança na direção \hat{e}_1 . Atribuímos esse fato à imposição de condições de contorno de velocidade prescrita distintas nas proximidades dessa região (na seção de entrada e nas paredes laterais). Ainda assim, avalia-se o coeficiente linear da reta de ajuste para obter um erro da ordem 2,5% cometido no cálculo da pressão na seção de entrada. Por outro lado, o desvio no cálculo do gradiente de pressão é obtido pela inclinação das curvas,

sendo de aproximadamente 2,0%. Esses resultados confirmam, mais uma vez, a validade dos resultados numéricos gerados pelo programa.

4.2 Escoamento em torno de um cilindro

Avaliemos então o escoamento bidimensional em torno de um cilindro. O campo de velocidade e o mapa de cor do campo de pressão são mostrados na Fig. 11 a seguir. No caso da Fig. 11(a), a condição de entrada é dada por um perfil uniforme de velocidade. Na Fig. 11(b), por sua vez, a pressão é maior nas regiões de cores quentes, caindo nas regiões de cores mais frias. As dimensões do domínio foram consideradas dez vezes maior que o raio do cilindro nas duas direções.

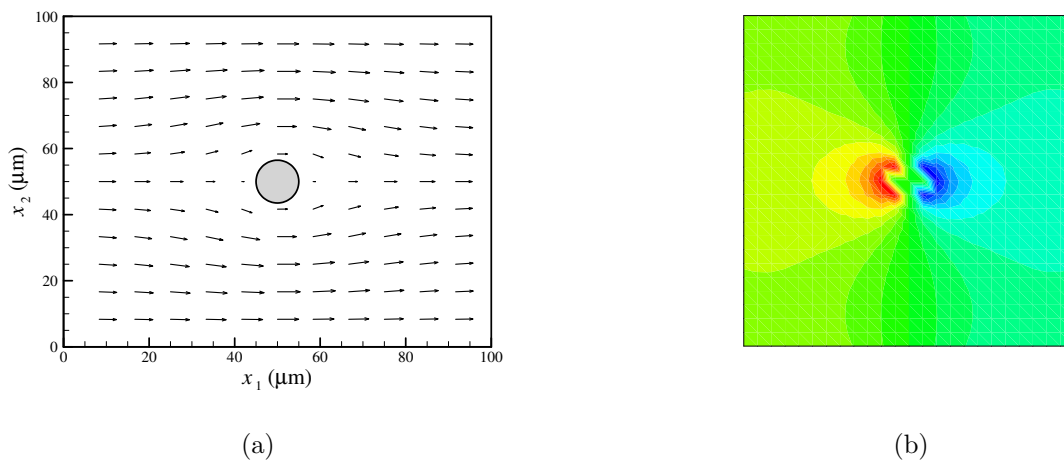


Figura 11 – Resultados para o escoamento em torno de um cilindro. Em (a), o campo de velocidade; em (b), o mapa de cor do campo de pressão.

Baseando-se na Fig. 11(a), nota-se que a presença do cilindro influencia de forma significativa o campo de velocidade do escoamento. O fluido contorna o cilindro localizado no centro do domínio, tornando o escoamento simétrico em relação aos eixos paralelos às direções \hat{e}_1 e \hat{e}_2 passando pelo seu centro. A condição de não-deslizamento faz com que a velocidade diminua consideravelmente nas proximidades do cilindro, sendo exatamente zero sobre sua superfície. Por outro lado, a velocidade retoma o valor do perfil uniforme imposto como condição de contorno na entrada em regiões distantes do cilindro. Essa constatação evidencia os altos gradientes de velocidade nas proximidades do corpo, embora não represente a formação de uma camada limite hidrodinâmica, já que o escoamento é livre de inércia (Schlichting, 1979). Mais que isso, pela Fig. 11(b) verifica-se a presença de um ponto de estagnação à montante do cilindro, onde a velocidade é zero e a pressão é máxima. A pressão na região à jusante do cilindro, por sua vez, é mais baixa. A simetria do escoamento em torno do cilindro, os altos gradientes de velocidade

na região próxima à sua superfície e as regiões de máxima e mínima pressão à montante e à jusante do corpo são fenômenos clássicos recuperados pelo código, servindo como critério de validação do programa.

4.3 Escoamento gerado pela rotação de um cilindro

Por fim, consideremos o escoamento gerado por um cilindro girando em um meio fluido inicialmente em repouso. O cilindro gira com velocidade angular ω constante no sentido horário ($\omega = -\omega \hat{e}_3$) e tanto o cilindro quanto o domínio possuem as mesmas dimensões utilizadas no caso anterior. O resultado para o campo de velocidade desse escoamento é dado na Fig. 12 a seguir.

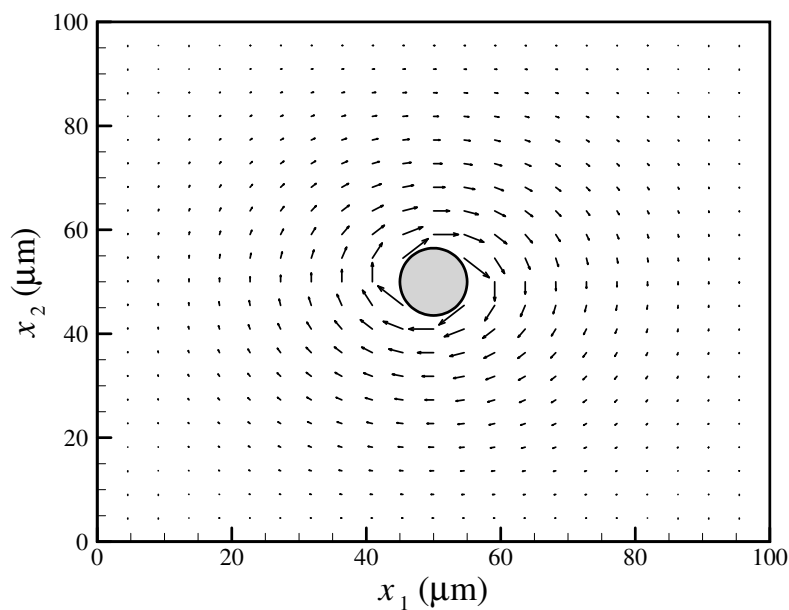


Figura 12 – Campo de velocidade do escoamento gerado por um cilindro girando em um fluido em repouso.

O perfil do campo de velocidade mostrado na Fig. 12 evidencia a existência de vorticidade nesse escoamento. Esse fenômeno é recuperado pelo programa pela correta imposição da condição de não-deslizamento em todos os contornos, representando um fenômeno físico bem conhecido. Por um lado, o fluido próximo ao cilindro acompanha seu movimento de rotação (exatamente sobre a superfície do cilindro, o fluido gira solidário à ele); por outro, em regiões mais distantes, o fluido não percebe a presença do corpo com tanta intensidade, permanecendo praticamente em repouso. Esse resultado é sustentado analisando-se a equação da vorticidade².

² A equação da vorticidade é obtida tomando-se o rotacional da equação de momento.

Para um escoamento de Stokes permanente e bidimensional, temos que $\nu \nabla^2 \boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}$, em que a viscosidade cinemática do fluido $\nu = \mu/\rho$ atua como um coeficiente de difusão de vorticidade. Assim sendo, a vorticidade é difundida pelo meio por ação da viscosidade, diminuindo à medida que nos afastamos do cilindro por uma ação dissipativa também causada pela viscosidade (Batchelor, 1967). Essa análise ratifica, mais uma vez, a validade do código desenvolvido.

5 Resultados e discussões

Este capítulo apresenta os resultados obtidos no presente projeto, incluindo discussões e comentários a eles relacionados. O código numérico desenvolvido para a geração destes resultados foi adaptado a partir do código utilizado na validação do Método dos Elementos de Contorno (Capítulo 4)¹. De forma simplificada, essa adaptação consistiu em incluir o termo relativo ao salto de tensões na interface dos fluidos (superfície da gota) nas equações integrais de contorno, e implementar o método de evolução temporal da superfície da gota. Mais especificamente, os resultados aqui apresentado estão divididos em: (i) descrição da geometria e parâmetros utilizados nas simulações; (ii) erro/estabilidade numérica do método em função do refinamento da malha; (iii) erro/estabilidade numérica do método em função do tamanho do passo de tempo utilizado na discretização temporal; (iv) influência do número de Capilaridade no escoamento da gota; (v) influência da razão de viscosidades entre os fluidos no escoamento da gota; e (vi) influência do tamanho relativo da gota no escoamento.

5.1 Geometria do problema

Em todas as simulações realizadas, utilizou-se a mesma geometria para o canal e para a gota. Um esquema da geometria do problema é apresentada na Fig. 13 a seguir. Os resultados são tratados de forma adimensional, de modo que todos os comprimentos são definidos em função da altura de entrada do canal, $H = 1$, e $U = 1$ para velocidade média para nessa seção. Note que o contorno do canal é composto por oito segmentos (segmentos 1 a 8; linhas retas), enquanto o contorno da gota, por apenas dois (segmentos 9 e 10; arcos de círculo). No início do escoamento, o centro da gota ocupa a posição $\mathbf{x} = (0,4H, 0,5H)$, e a constrição do canal é de 2:1.

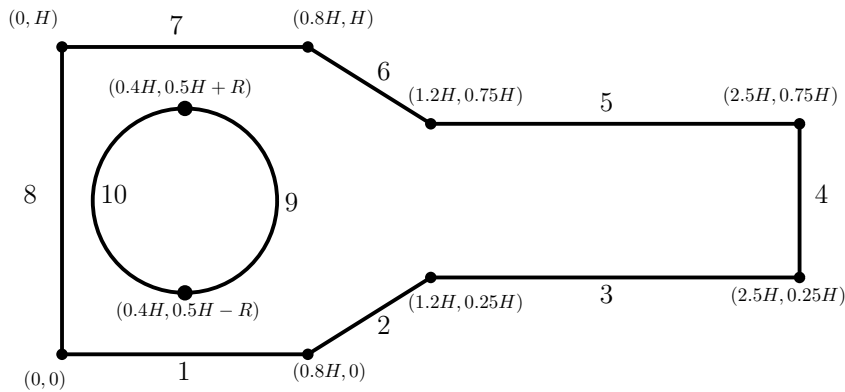


Figura 13 – Esquema da geometria do problema, explicitando os 10 segmentos que definem o contorno do canal e da gota.

¹ Manteve-se o código escrito em MATLAB[®].

5.2 Testes de convergência da malha

Em geral, os resultados obtidos por métodos numéricos usuais (MEC, MEF, MDF) são mais precisos à medida que a discretização da malha é incrementada. Em contra partida, aumentar o refinamento da malha implica um maior custo computacional exigido nas simulações. Sendo assim, a definição da malha utilizada na discretização do problema é um assunto de grande importância, sendo necessário realizar um estudo de convergência de malha para determinar a melhor relação entre os resultados numéricos obtidos e o custo computacional necessário.

A discretização espacial do contorno foi calculada mantendo-se a proporção entre a quantidade de elementos em cada segmento. Nesse sentido, seja Ne uma determinada quantidade de elementos. Os segmentos 2, 4 e 6 são discretizados com Ne elementos; os segmentos 1, 7 e 8, com $2Ne$ elementos; e os segmentos 3, 5, 9 e 10, com $3Ne$ elementos. A convergência dos resultados em relação ao refinamento da malha foi analisada considerando-se o erro numérico cometido no cálculo da vazão do escoamento na saída do canal em relação ao imposto na entrada, o erro numérico cometido no cálculo da área da gota em relação a área inicial, e a convergência da pressão de bombeamento imposta ao escoamento para diferentes valores de Ne . Os resultados obtidos são apresentados nas Figuras 14, 15 e 16, em que a posição ao longo do canal é dada pela coordenada x_1 do ponto mais à direita da gota dividida pelo comprimento total do canal, $2,5H$. Nas simulações, $Ca = 0,25$, $\lambda = 10$, $a = 0,55$ e $\Delta t = 0,01$.

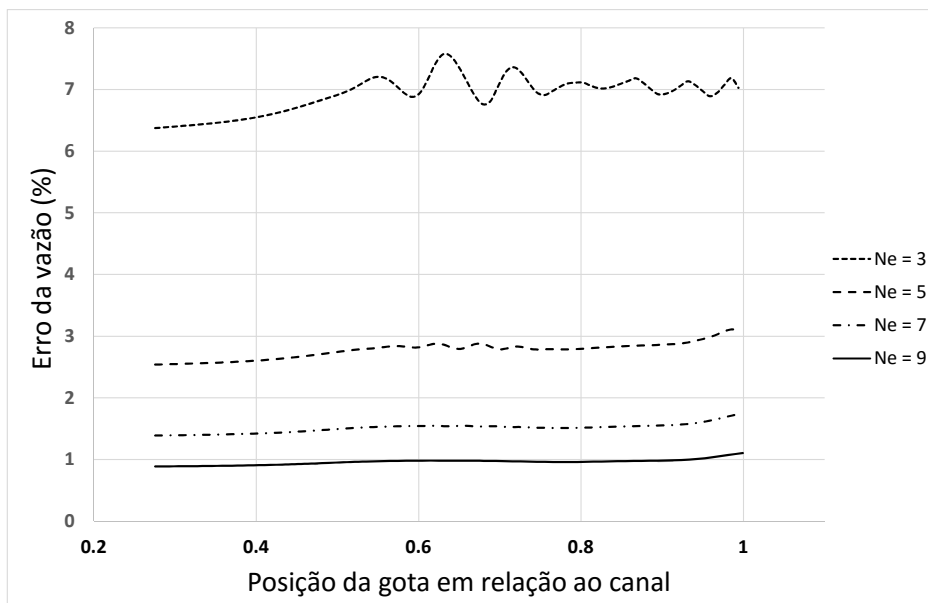


Figura 14 – Erro numérico cometido no cálculo da vazão em função do refinamento da malha.

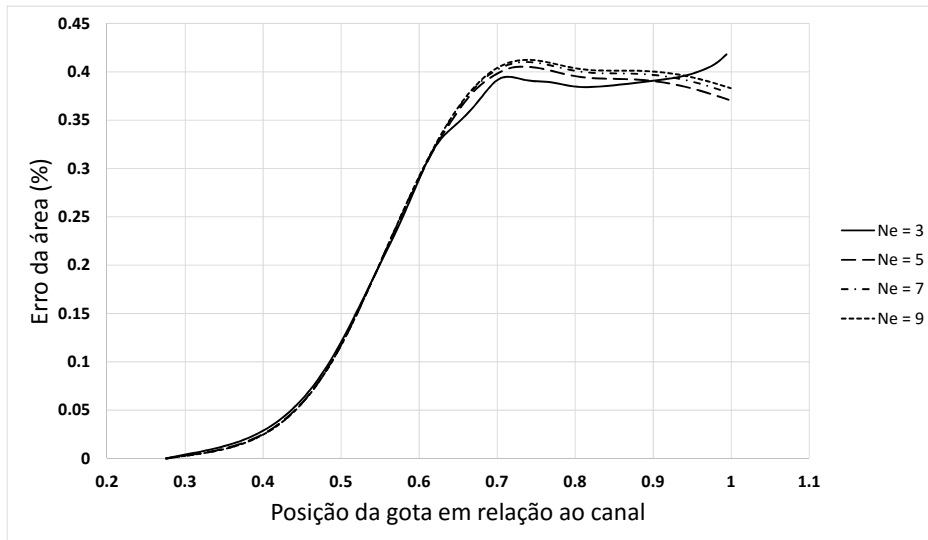


Figura 15 – Erro numérico cometido no cálculo da área da gota em função do refinamento da malha.

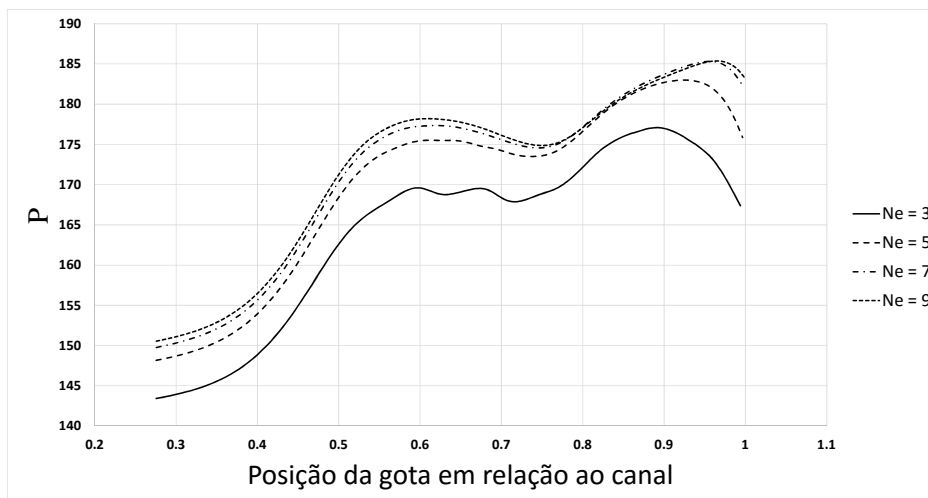


Figura 16 – Pressão de bombeamento no escoamento em função do refinamento da malha.

O gráfico da Fig. 14 mostra que o erro numérico cometido no cálculo da vazão diminui consideravelmente à medida que o refinamento da malha aumenta. Para $Ne = 3$, o erro é da ordem de 7,0%, caindo para aproximadamente 1,0% quando $Ne = 9$. Em todos os casos o erro permanece constante ao longo da coordenada espacial x_1 , embora apresente pequenas oscilações no caso de menor refinamento (provavelmente por conta de instabilidades numéricas). O gráfico da Fig. 15, por sua vez, mostra que o erro numérico cometido no cálculo da área da gota é praticamente invariante ao refinamento da malha. Esse resultado é sustentado pelo fato de os erros cometidos no cálculo da área da gota estarem associados ao seu formato instantâneo,

o qual, por sua vez, depende essencialmente do passo de tempo utilizado na discretização temporal. Uma vez que o passo de tempo empregado foi o mesmo em todos os casos, a área da gota varia de forma muito sutil com o refinamento da malha. As curvas obtidas para diferentes refinamentos são virtualmente as mesmas, e o erro máximo, nesse caso, é da ordem 0,4 % e ocorre em $x_1 = 0,4$, aproximadamente. Finalmente, as curvas de pressão apresentadas na Fig. 16 mostram que a pressão no escoamento depende do refinamento da malha. Todavia, note que todas as curvas tendem a colapsar em uma única curva à medida que o refinamento da malha aumenta. Em termos do tempo exigido nas simulações para cada passo, verificou-se que ele varia de 2,2 segundos para $Ne = 3$ para 28,5 segundos para $Ne = 9$.²

Com base nessa análise, e considerando o balanço entre os erros numéricos cometidos em cada caso e o tempo despendido em cada simulação, todos os resultados apresentados a seguir foram obtidos com malhas em que $Ne = 7$, a qual tem um custo médio de 11,4 segundos por passo.

5.3 Estabilidade do método em relação ao passo de tempo

O problema de uma gota escoando em regime de Stokes é *quasi*-estacionário, não dependendo explicitamente do tempo. De fato, as equações integrais obtidas para descrever os campos de velocidade e tensão são permanentes. Sendo assim, dada uma forma de gota, o MEC determina numericamente os campos desconhecidos em cada nó da discretização espacial. A dependência temporal fica implícita no problema, sendo relevante para evolução da forma da gota entre instantes consecutivos do escoamento, que é dada pela equação cinemática evolutiva $d\mathbf{x}_0/dt = \mathbf{u}(\mathbf{x}_0, t)$ (ver Seção 3.8). Aqui, a marcha temporal foi realizada com um Método de Euler explícito de primeira ordem.

O efeito do tamanho do passo de tempo Δt utilizado na discretização temporal em termos de erros numéricos e estabilidade do método também foi estudado. Assim como no caso do estudo de convergência de malha em termos da discretização espacial, os resultados foram analisados considerando o erro numérico cometido no cálculo da vazão, o erro numérico cometido no cálculo da área da gota, e as curvas de pressão ao longo do escoamento para diferentes passos de tempo. Esses resultados são mostrados nas Figs. 17, 18 e 19, respectivamente. Nessas simulações, $Ca = 0,25$, $\lambda = 10$, $a = 0,55$ e $Ne = 7$.

O gráfico da Fig. 17 mostra que o cálculo da vazão é pouco sensível ao refinamento temporal do método numérico empregado. De fato, esse cálculo depende apenas da discretização espacial da malha, conforme discutido anteriormente. Em todos os casos, o erro numérico cometido nas simulações manteve-se na faixa entre 1,4% e 1,6%. Mais ainda, as curvas obtidas tendem a colapsar à medida que o refinamento é aumentado. Por outro lado, o cálculo da área

² Os tempos exigidos nas simulações podem ser consideravelmente baixados utilizando técnicas de otimização e reescrevendo o código em outra linguagem de programação mais rápida.

da gota é bastante afetado pela discretização utilizada na marcha temporal de evolução da forma da gota, diminuindo consideravelmente com o refinamento, como mostra a Fig. 18. Para $\Delta t = 0,1$, o erro máximo é da ordem de 4,75%, caindo para cerca de 0,25% quando $\Delta t = 0,005$. À medida que o passo de tempo diminui, todos os resultados tendem à uma mesma curva, indicando a convergência do método. Finalmente, o comportamento da pressão no escoamento também é pouco afetado pelo passo de tempo utilizado na solução, como indicado no gráfico da Fig. 19. Mais uma vez, as curvas tendem a se sobrepor à medida que o passo de tempo é refinado, indicando a convergência do método. Considerando essas análises, optou-se por utilizar $\Delta t = 0,01$ para o passo de tempo nas simulações apresentadas nas próximas seções.

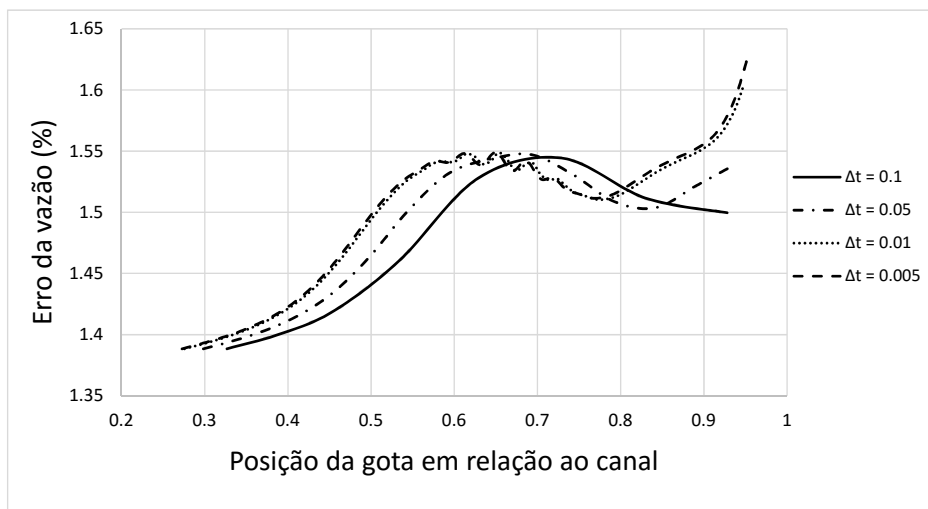


Figura 17 – Erro numérico cometido no cálculo da vazão em função do passo de tempo.

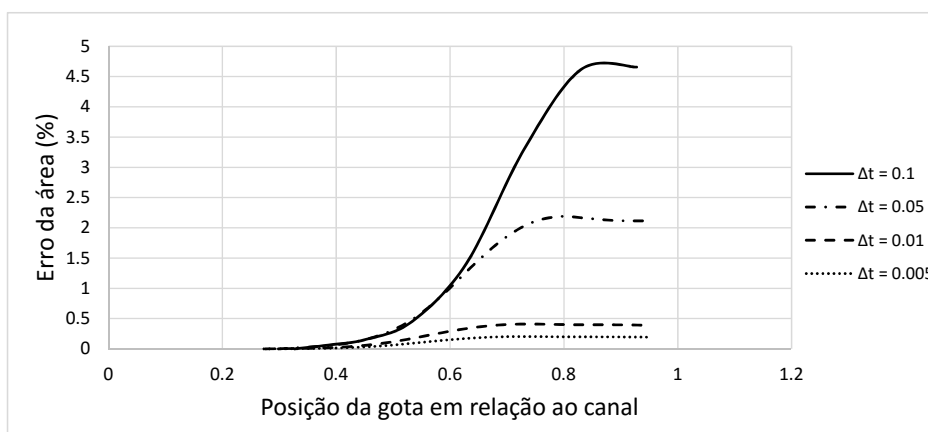


Figura 18 – Erro numérico cometido no cálculo da área da gota em função do passo de tempo.

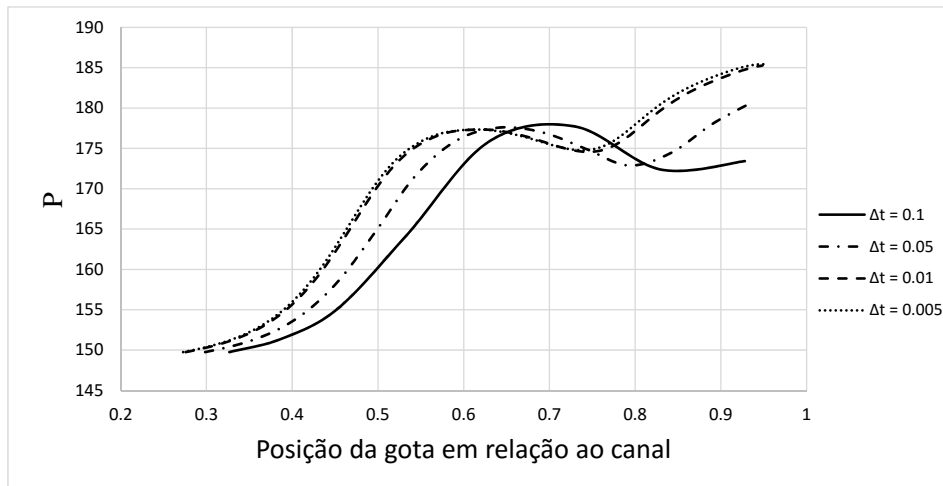


Figura 19 – Pressão de bombeamento no escoamento em função do passo de tempo.

5.4 Efeito do número de capilaridade

O número de capilaridade é um parâmetro central no estudo da mecânica e reologia de emulsões, sendo definido como a razão entre as forças viscosas e as forças interfaciais com origem na tensão interfacial entre os fluidos. Aqui, ele é definido como $Ca = \mu U / \sigma$. A ação da tensão interfacial atua no sentido de fazer com que, dado um volume, a superfície da gota ocupe a menor área possível (formato esférico). No escoamento no canal convergente, a mudança de geometria dada pela constrição induz deformações superficiais na gota pelo caráter extensional do escoamento nessa região. Por outro lado, as forças capilares tendem à restaurar sua forma esférica original. A resposta imediata à esse balanço de forças é dado por um aumento na pressão de bombeamento do escoamento, forçando a passagem da gota pela constrição a fim de manter a vazão do escoamento constante. Do ponto de vista prático associado à injeção de emulsões em métodos de recuperação avançada de óleo residual em poços produtores, esse incremento de pressão é capaz de bombear o óleo aprisionado em gânglios de poros vizinhos, aumentando a produtividade do poço e justificando a utilização de tais métodos.

Dessa maneira, fica evidente a importância do número de capilaridade no escoamento da gota através do canal convergente. Nesse sentido, as Figs. 20 a 28 trazem fotos da gota escoando pelo canal convergente em diferentes posições e para diferentes combinações de razão de viscosidade e número de capilaridade. Os valores aqui explorados foram $\lambda = 30$, $\lambda = 20$ e $\lambda = 10$, e $Ca = 1$, $Ca = 0,25$ e $Ca = 0,0625$. Em todas as simulações, utilizou-se $a = 0,55$ para o diâmetro inicial da gota.

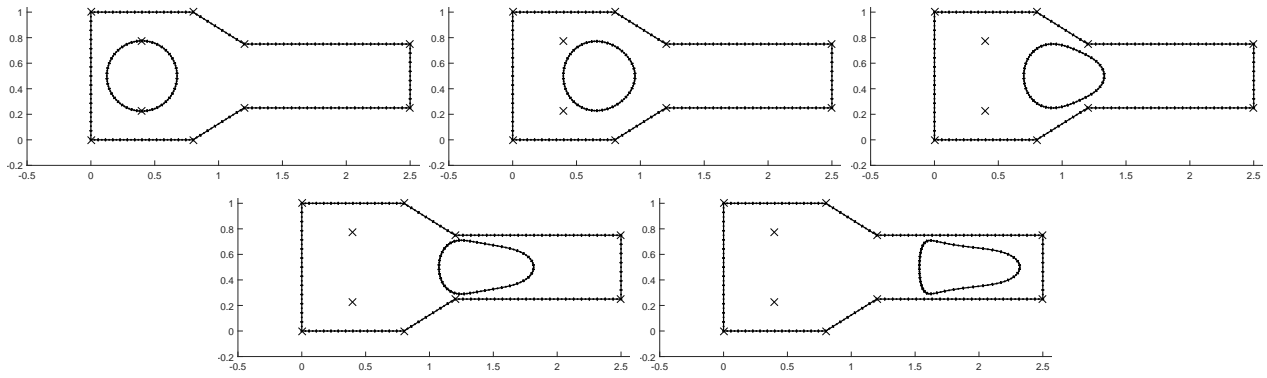


Figura 20 – Fotos da gota escoando pelo canal em 5 diferentes momentos, para $Ca = 1$ e $\lambda = 30$.

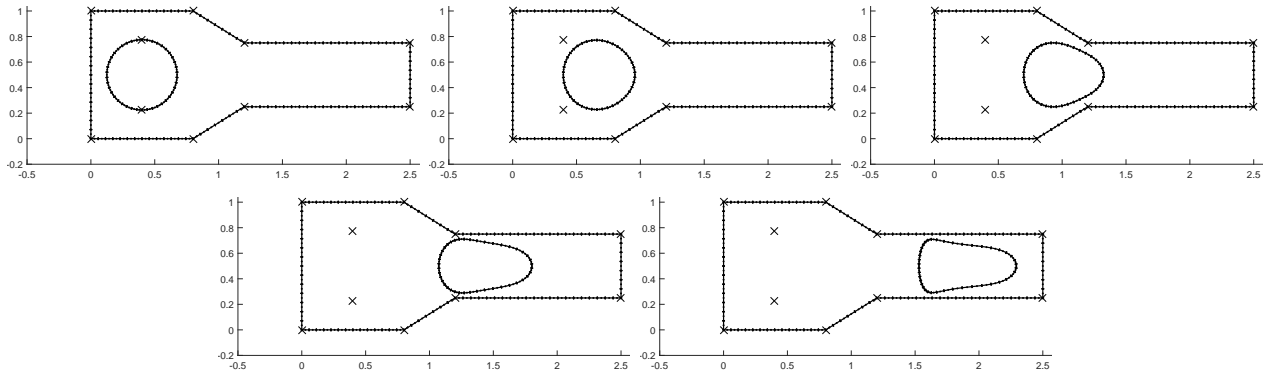


Figura 21 – Fotos da gota escoando pelo canal em 5 diferentes momentos, para $Ca = 0,25$ e $\lambda = 30$.

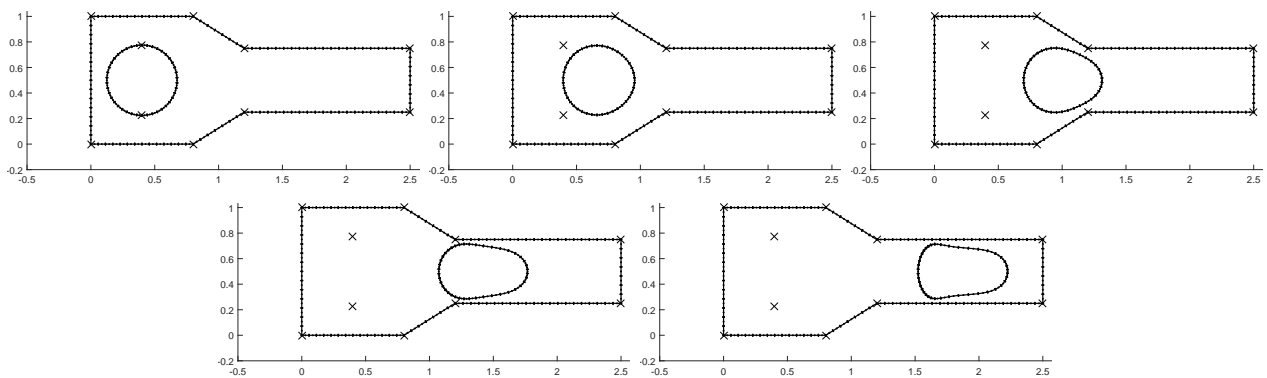


Figura 22 – Fotos da gota escoando pelo canal em 5 diferentes momentos, para $Ca = 0,0625$ e $\lambda = 30$.

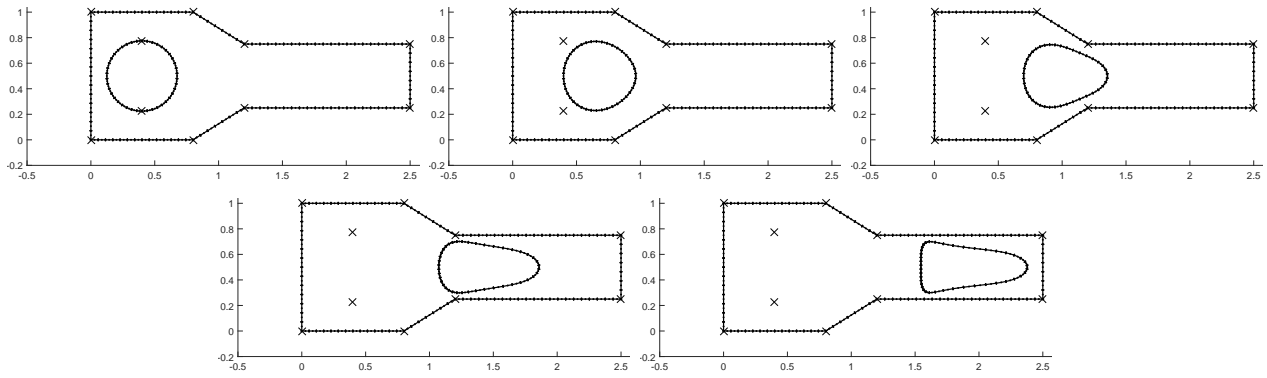


Figura 23 – Fotos da gota escoando pelo canal em 5 diferentes momentos, para $Ca = 1$ e $\lambda = 20$.

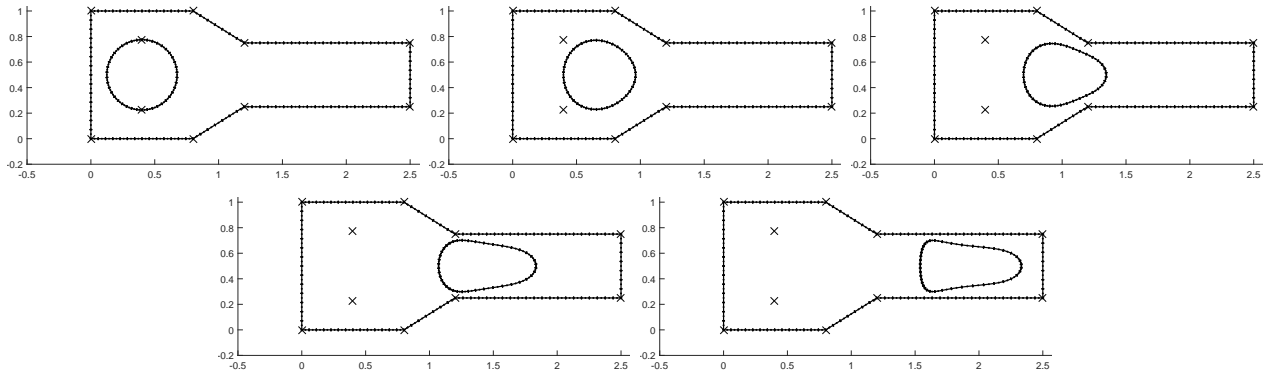


Figura 24 – Fotos da gota escoando pelo canal em 5 diferentes momentos, para $Ca = 0,25$ e $\lambda = 20$.

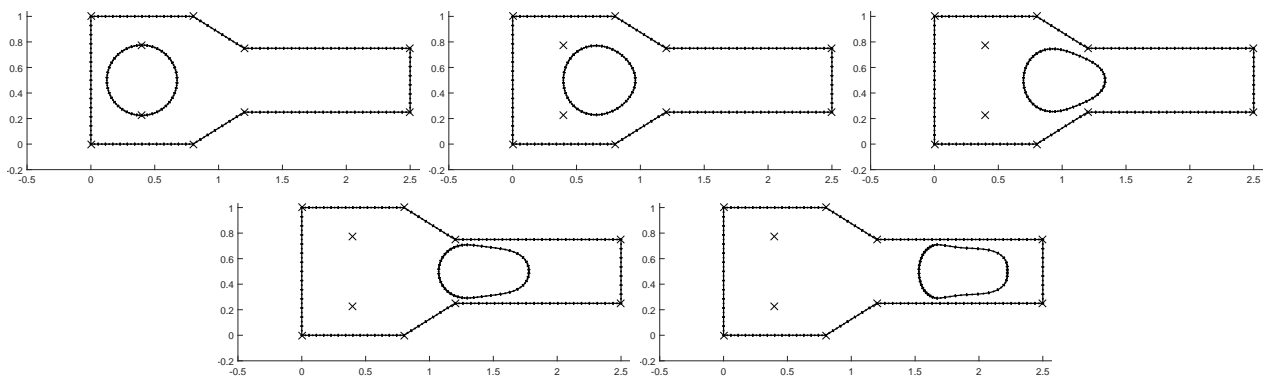


Figura 25 – Fotos da gota escoando pelo canal em 5 diferentes momentos, para $Ca = 0,0625$ e $\lambda = 20$.

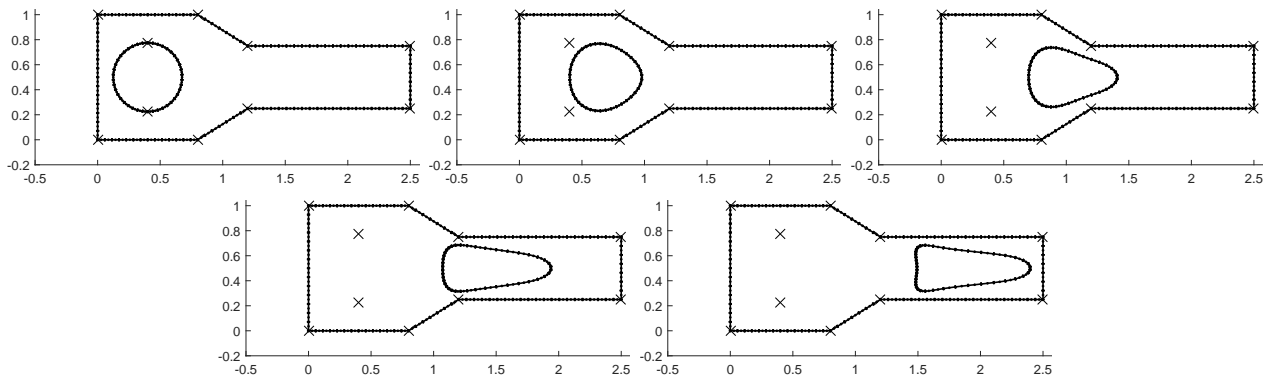


Figura 26 – Fotos da gota escoando pelo canal em 5 diferentes momentos, para $Ca = 1$ e $\lambda = 10$.

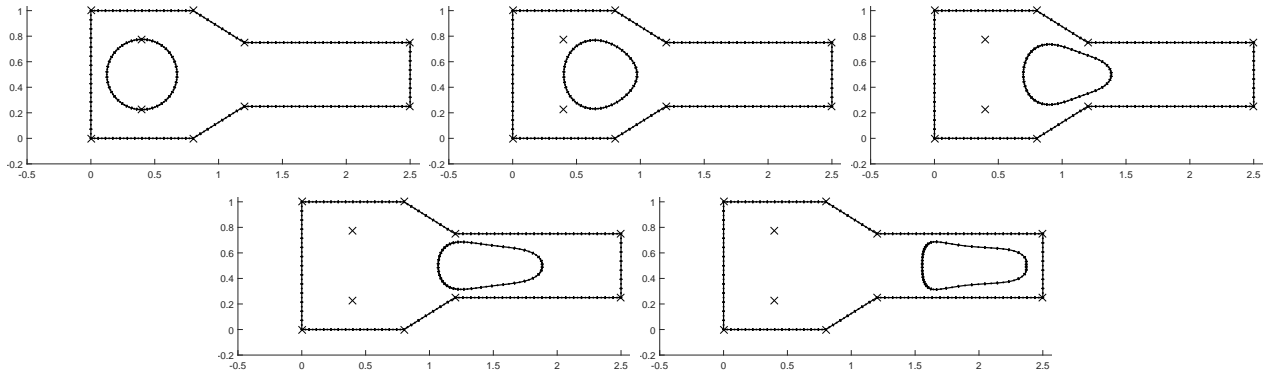


Figura 27 – Fotos da gota escoando pelo canal em 5 diferentes momentos, para $Ca = 0,25$ e $\lambda = 10$.

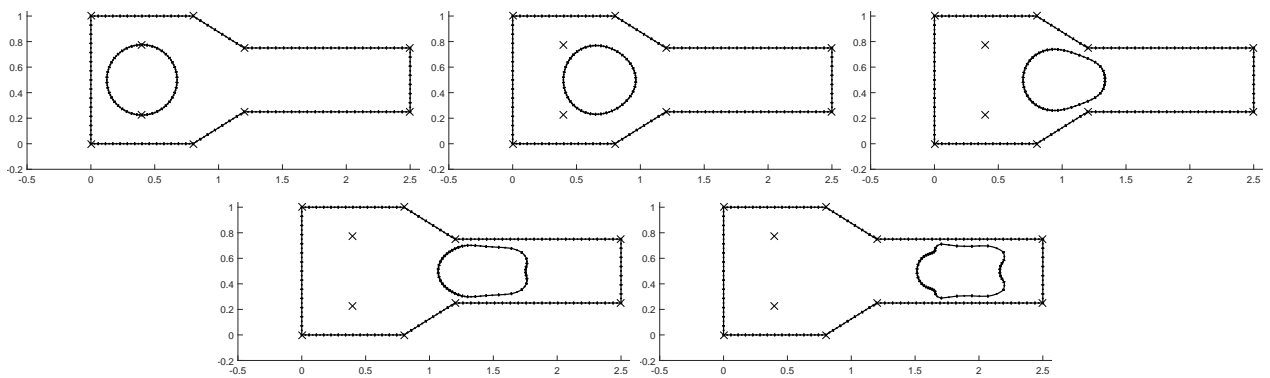


Figura 28 – Fotos da gota escoando pelo canal em 5 diferentes momentos, para $Ca = 0,0625$ e $\lambda = 10$.

A partir das imagens apresentadas nas Figs. de 20 a 28, nota-se que menores números de capilaridade resultam em gotas com formatos mais suaves (ou mais arredondadas). Forças capilares empurram a superfície da gota na direção normal e em sentido ao seu centro de curvatura, e quanto maior a curvatura e menor o número de capilaridade, mais intensa é essa força (de acordo com a equação de Young-Laplace para o salto de tensões na interface). Esse mecanismo é o responsável pelo formato da gota. Na Fig. 28 vemos que a gota adquiriu uma forma não esperada, indicando uma instabilidade em algum momento da simulação. Essa instabilidade pode ter ocorrido por três diferentes motivos (ou ainda uma combinação entre eles). A existência de uma curvatura muito acentuada em determinada posição da superfície da gota gerou uma alta tensão na interface, resultando em uma velocidade que o passo de tempo utilizado não foi suficiente para acompanhar as deformações da gota de modo suave entre dois instances consecutivos. Por outro lado, descontinuidades na superfície da gota, como apresentadas na Fig. 29, podem acarretar em erros no cálculo da curvatura. Curvaturas com o centro no exterior da gota não foram previstos nas formulações, podendo ser a causa de instabilidades. A primeira e a segunda causas mencionadas podem ser corrigidas refinando o passo de tempo e discretizando ainda mais o contorno da gota, respectivamente. A terceira causa de instabilidade exige a implementação de um método para reconhecimento de superfícies côncavas ou convexas. Existem ainda técnicas para controlar a simulação de modo a evitar instabilidades devido ao passo de tempo. A técnica utilizada por Yan et al. (2006) consiste em calcular o passo de tempo para cada iteração a partir de um deslocamento máximo permitido aos nós. Outros autores preferem calcular o passo de tempo em função do tempo característico de relaxação da gota Oliveira (2007). Ainda não foi encontrado na literatura métodos para amenizar as descontinuidades apresentadas na superfície da gota quando elementos de segunda ordem são utilizados. Há expectativas de que o uso de elementos do tipo isogeométricos evitem essas descontinuidades.

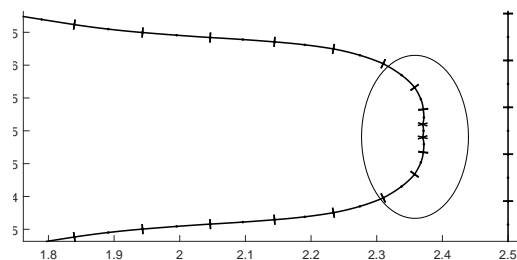


Figura 29 – Descontinuidades na superfície da gota após altas deformações para $Ca = 0,25$ e $\lambda = 10$.

À medida em que a gota deforma-se, os elementos sobre a interface deixam de ser igualmente espaçados. Mais ainda, os elementos tendem a concentrar-se na parte da frente e de trás da gota. Essa diferença no espaçamento não é um fator preocupante para a estabilidade e precisão do método, já que os elementos concentram-se nas regiões de maiores curvaturas (aparentemente mais críticas para o colapso da simulação). Contudo, Wrobel et al. (2009) apre-

senta um método de realocação dos nós para cada passo de tempo, tendendo a manter os nós igualmente espaçados durante a simulação. Porém, não há resultados indicando um ganho significativo na precisão do método quando essa técnica é utilizada.

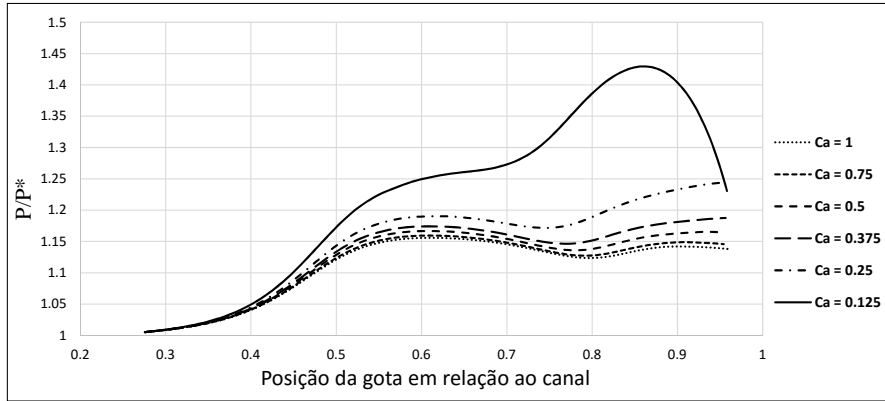


Figura 30 – Pressão de bombeamento no escoamento em função do número de capilaridade para $\lambda = 10$.

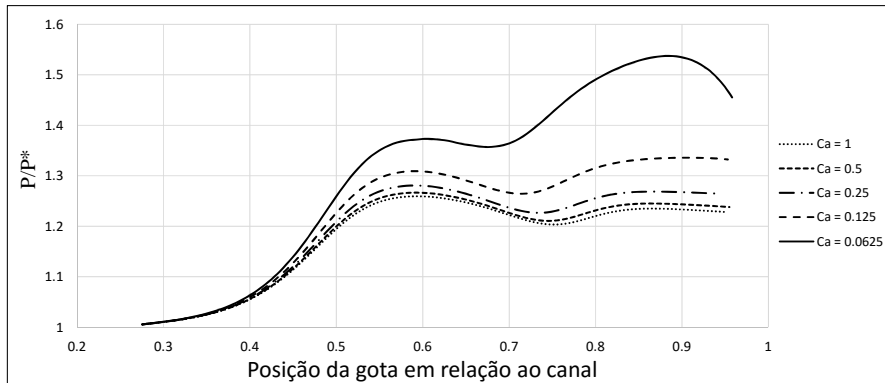


Figura 31 – Pressão de bombeamento no escoamento em função do número de capilaridade para $\lambda = 20$.

Os gráficos das Figs. 30 a 33 mostram a influência do número de capilaridade sobre a pressão de bombeamento do escoamento³. As curvas mostradas nessas figuras apresentam um comportamento muito semelhante, tornando nítida a grande influência do número de capilaridade na pressão de bombeamento durante o escoamento. Fica claro também o aumento de pressão necessário para que a gota deforme e atravesse o canal (intervalo de $x_1 = 0,4$ a $x_1 = 0,6$). Uma vez que a gota entra no canal, a pressão de bombeamento flutua em torno da atingida na região da constrição. O ponto relativo $x_1 = 0,59$ foi adotado como referência para uma análise mais específica da influência do número de capilaridade no comportamento da pressão. Para diferentes valores da razão de viscosidade, essa relação é apresentada nos gráficos das Fig. 33. Analisando esse gráfico, verificamos uma relação praticamente linear entre o inverso do número de capilaridade, Ca^{-1} , e a diferença de pressão imposta, $\Delta P/P^*$. Pelas equações das restas de regressão, quanto menor a razão de viscosidade, maior é a influência das forças capilares na diferença de pressão.

³ P^* é diferença de pressão obtida para o escoamento na ausência da gota, em que $P^* = 149$.

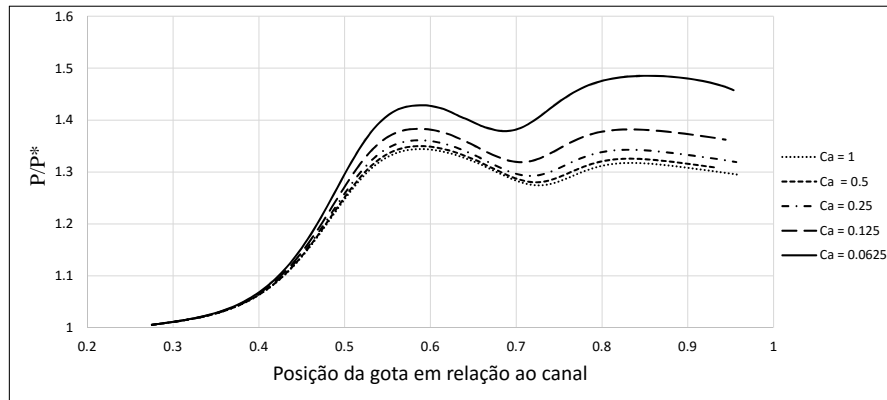


Figura 32 – Pressão de bombeamento no escoamento para $\lambda = 30$ e diferentes números de capilaridade.

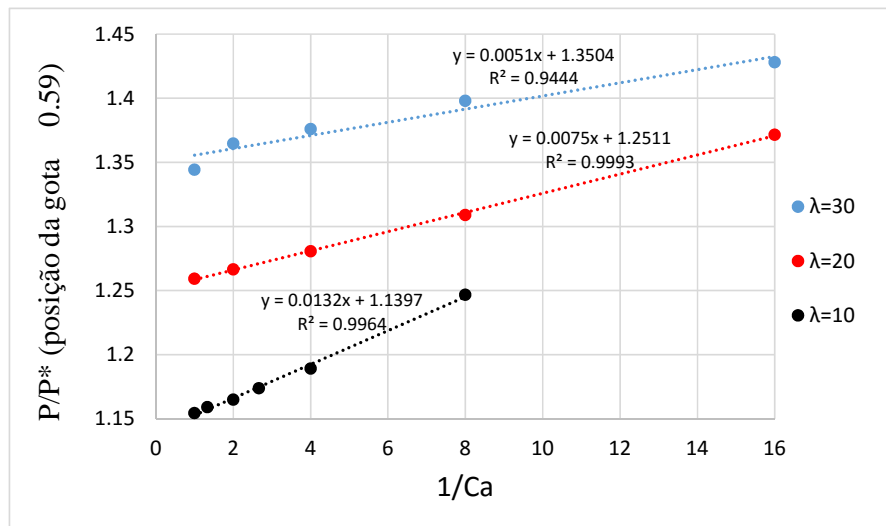


Figura 33 – Pressão de bombeamento em $x_1 = 0,59$ em função de Ca^{-1} para diferentes razões de viscosidade.

5.5 Efeitos da razão de viscosidade

Agora, consideremos a análise dos efeitos da razão entre as viscosidades das fases no escoamento da gota através do canal convergente. A Fig. 34 mostra o formato da gota em $x_1 = 0,59$ para diferentes valores da razão de viscosidade em um escoamento com $Ca = 0,25$. Em seguida, a 35 mostra o comportamento da pressão ao longo do escoamento, também em função de λ para $Ca = 0,25$. Finalmente, a Fig. 36 mostra o comportamento da pressão em $x_1 = 0,59$ considerando o mesmo caso.

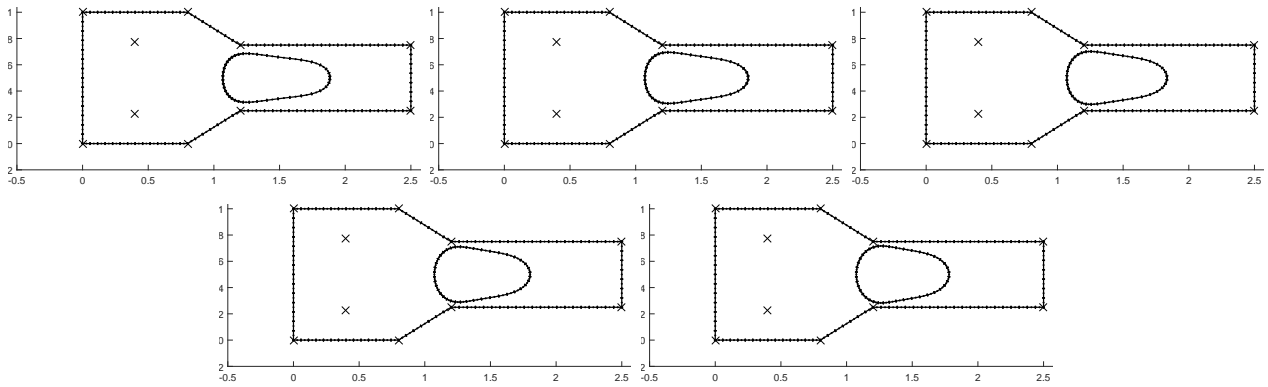


Figura 34 – Formatos da gota em um mesmo instante. Da esquerda para direita, $\lambda = 10, 15, 20, 30$ e 40 respectivamente.

Observando a Fig. 34, nota-se que as gotas com maiores viscosidades apresentam menores deformações. De fato, quanto maior a viscosidade da fase dispersa em relação à contínua, maior é sua resistência a sofrer deformações, e, portanto, maior a tendência em manter-se no formato esférico original. Chama a atenção que, enquanto as forças capilares tendem a manter a gota no formato esférico em função da deformação de sua superfície, a razão de viscosidade atua na resistência a deformação.

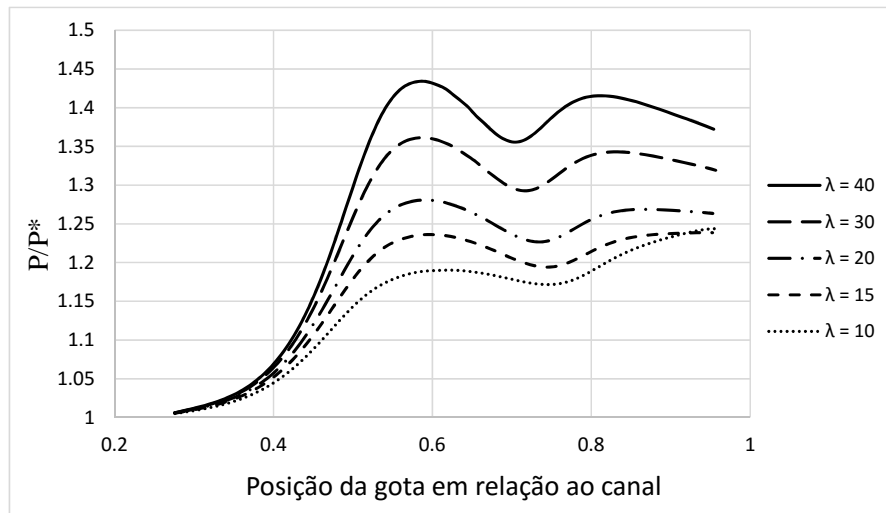


Figura 35 – Pressão de bombeamento em função de λ , para $Ca = 0,25$.

O gráfico apresentado na Fig. 35 mostra com clareza a grande influência da razão de viscosidades sobre as curvas de $\Delta P/P^*$. Maiores valores para λ resultam no alcance de maiores pressões de bombeamento. O gráfico da Fig. 36 apresenta os valores de $\Delta P/P^*$ obtidos na posição $x_1 = 0,59$ para os diferentes valores para λ , apresentando de forma mais clara a relação entre estas grandezas.

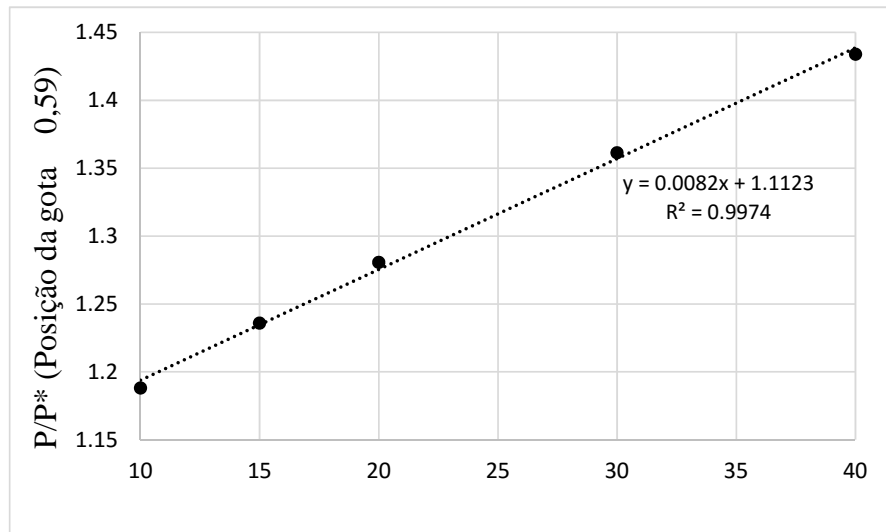


Figura 36 – Pressão de bombeamento para a posição da gota em aproximadamente 0,59 em função de λ , para $Ca = 0,25$.

5.6 Efeito do diâmetro inicial da gota

Finalmente, consideremos a análise do efeito do diâmetro inicial da gota, a , no escoamento. As Figs. 37 a 41 mostram a passagem de gotas com diferentes diâmetros iniciais pelo canal. Em todos os casos, $\lambda = 10$ e $Ca = 0,25$. Note que as deformações aumentam à medida que o diâmetro inicial da gota aumenta, ratificando o grande caráter extensional do escoamento nas proximidades da constrição. A consequência desse comportamento é o aumento da pressão de bombeamento no escoamento, como mostra a Fig. 42. Por fim, a Fig. 43 mostra a pressão máxima obtida no escoamento em função do tamanho inicial da gota.

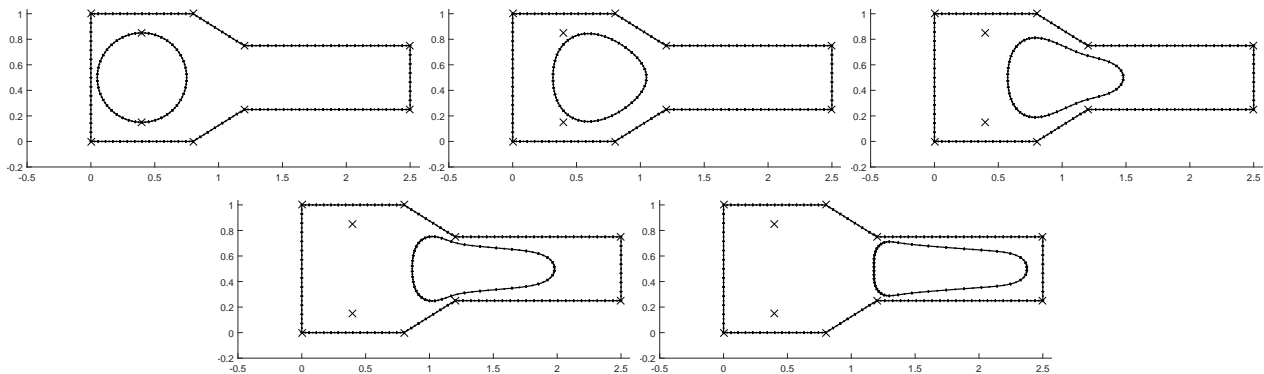


Figura 37 – Formas apresentadas pela gota em diferentes momentos para $a = 0,70$, utilizando $Ca = 0,25$ e $\lambda = 10$.

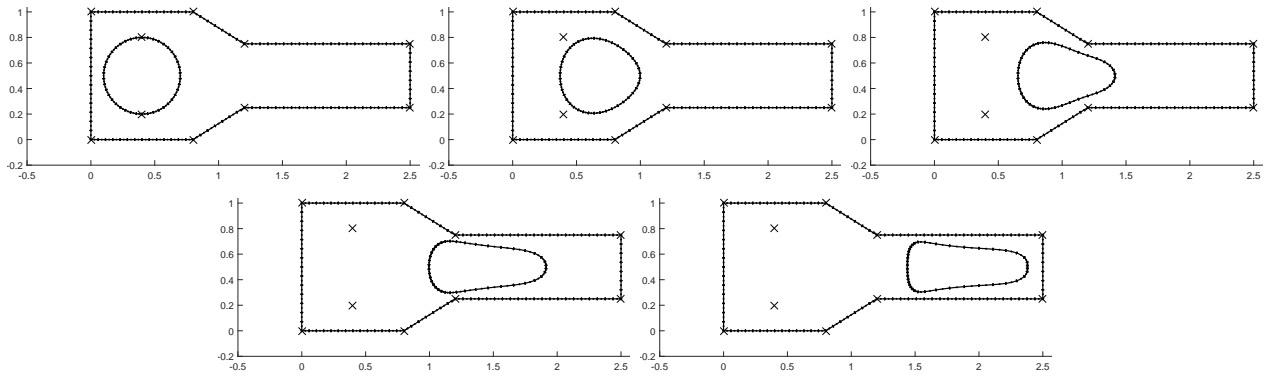


Figura 38 – Formas apresentadas pela gota em diferentes momentos para $a = 0,60$, utilizando $Ca = 0,25$ e $\lambda = 10$.

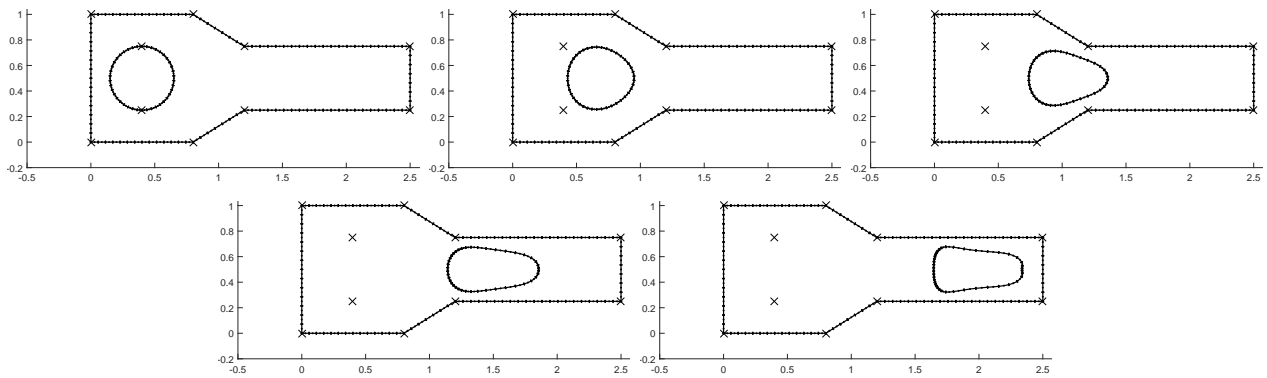


Figura 39 – Formas apresentadas pela gota em diferentes momentos para $a = 0,50$, utilizando $Ca = 0,25$ e $\lambda = 10$.

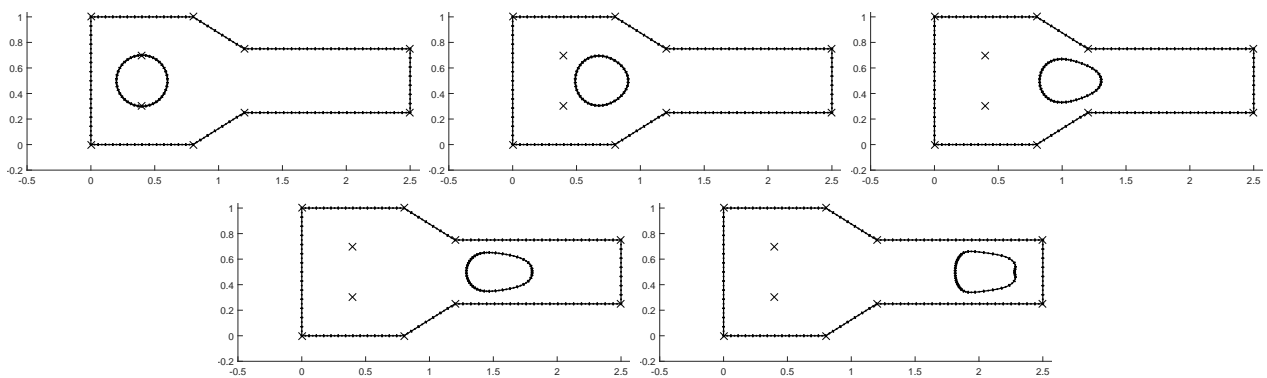


Figura 40 – Formas apresentadas pela gota em diferentes momentos para $a = 0,40$, utilizando $Ca = 0,25$ e $\lambda = 10$.

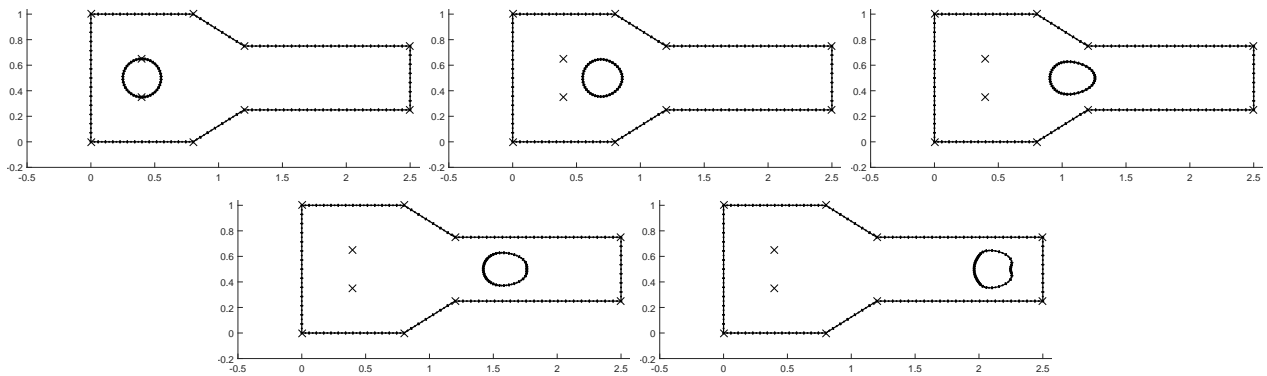


Figura 41 – Formas apresentadas pela gota em diferentes momentos para $a = 0,30$, utilizando $Ca = 0,25$ e $\lambda = 10$.

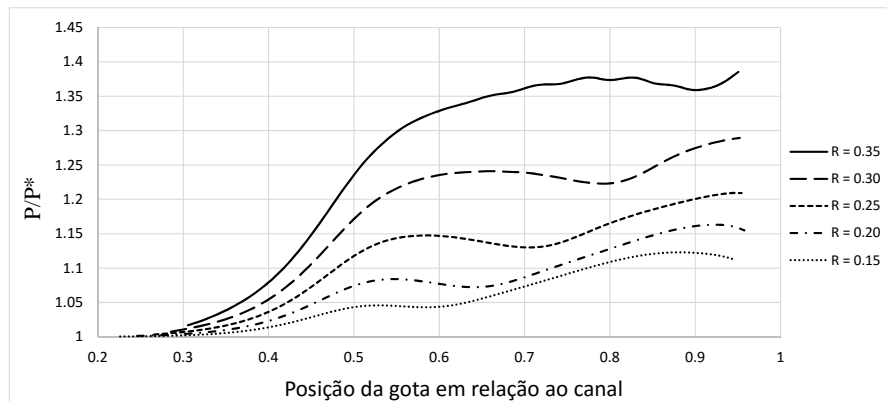


Figura 42 – Pressão de bombeamento em função da posição relativa a gota dentro do canal, utilizando $Ca = 0,25$ e $\lambda = 10$ para diferentes tamanhos de raio inicial da gota.

O gráfico da Fig. 42 confirma o aumento na pressão de bombeamento com o aumento do tamanho inicial das gotas. Esse fenômeno é consequência direta da taxa de deformação das gotas ao passarem pela constrição, que aumenta com o tamanho das gotas. Na Fig. 41 o ultimo momento exposto para esse tamanho de gota, apresenta um início de instabilidade em sua geometria, enquanto para gotas maiores isto não ocorre. Pequenos raios indicam maiores curvaturas e, como discutido anteriormente, este é um dos parâmetros que gera maiores problemas no método. Por fim, o gráfico da Fig. 43 mostra que a pressão máxima no escoamento segue uma relação aproximadamente quadrática com o diâmetro inicial das gotas.

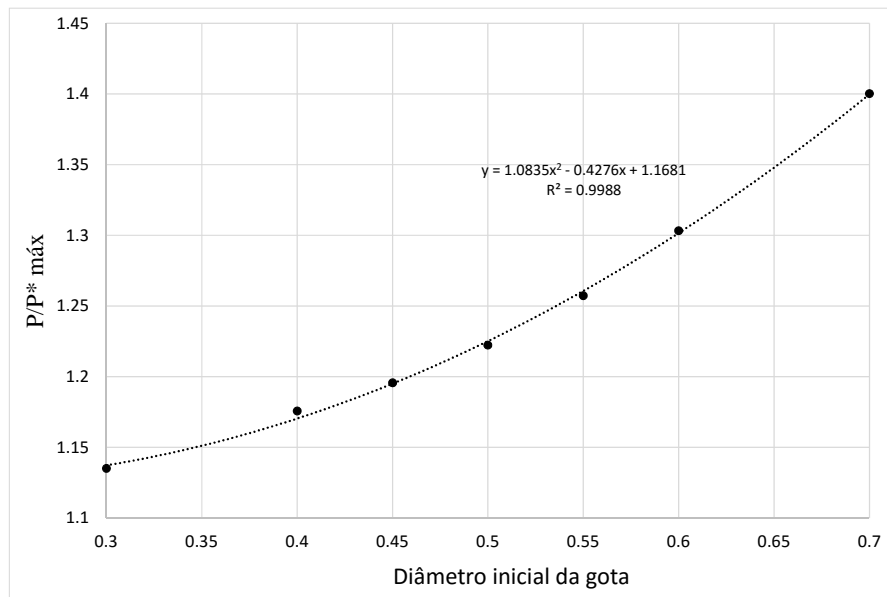


Figura 43 – Pressão de bombeamento máxima obtida em função do raio da gota, para $Ca = 0,25$ e $\lambda = 10$.

6 Conclusões e trabalhos futuros

6.1 Conclusões preliminares

O presente trabalho abordou o escoamento de emulsões em meios porosos motivando-se pelo processo de recuperação avançada de óleo residual em poços produtores. Do ponto de vista prático, o escoamento de uma emulsão requer maior gradiente de pressão em relação ao escoamento de um fluido Newtoniano para que a vazão seja mantida constante. Esse aumento da pressão de bombeamento é capaz de recuperar óleo aprisionado em gânglios de poros vizinhos, justificando a aplicação desse tipo de procedimento na indústria petrolífera. O modelo utilizado considera o escoamento de uma gota plana de fluido Newtoniano dispersa em outro fluido Newtoniano imiscível. Ambos os fluidos escoam através de um canal convergente cuja constrição representa o meio poroso. Como as dimensões da gota e do meio poroso são da mesma ordem de grandeza, não é possível tratar a emulsão como um meio contínuo equivalente, sendo necessário realizar uma análise do escoamento na microescala visto como bifásico. Toda formulação matemática e metodologia numérica para solução do problema utilizando o Método dos Elementos de Contorno foi desenvolvida. A metodologia numérica foi validada a partir de casos clássicos disponíveis na literatura.

A formulação matemática completa do modelo é apresentada e discutida em detalhes. Partindo-se das equações de balanço da mecânica do contínuo clássica, uma análise adimensional baseada em escalas características do problema é utilizada para concluir que a inércia é desprezível no escoamento. Sendo assim, o escoamento é governado pelas equações de Stokes. Lançando mão do Teorema da Reciprocidade de Lorentz e da solução fundamental do escoamento gerado por um ponto de força, obtém-se uma representação integral para o campo de velocidade no escoamento. Mesmo em um problema bidimensional, essa representação considera apenas integrais de linha sobre o contorno, sendo o ponto de partida para implementação do Método dos Elementos de Contorno. Uma análise do escoamento visto como bifásico é realizada para obter uma representação integral que relaciona os campos de velocidade e tensão entre os fluidos. Uma condição dinâmica de salto de tensões na interface que define a superfície da gota é utilizada para compactuar a formulação integral em um sistema de equações para os campos de velocidade e tensão sobre a superfície da gota e sobre o contorno externo do canal. Finalmente, esse sistema é adimensionalizado com base em escalas características do problema, identificando-se parâmetros típicos nesse tipo de abordagem, como o número de capilaridade da gota e a relação entre o diâmetro inicial da partícula e a altura do canal.

A metodologia numérica para solução do problema utilizando o Método dos Elementos de Contorno também foi desenvolvida. Procedimentos básicos do método, tais como a geração da malha e uma análise elementar são discutidos em detalhes. Aqui, utilizamos elementos quadráticos contínuos, o que requer o uso de funções de forma dadas por polinômios interpoladores de segundo grau. O cálculo de elementos geométricos dos contornos, tais como curvatura local e vetor normal também são discutidos do ponto de vista elementar. Então, o sistema de equações integrais para os campos de velocidade e tensão no contorno é discretizado, sendo reescrito em termos de integrais sobre cada elemento de contorno. As técnicas utilizadas nas integrações numéricas, tratamento das singularidades e na solução do sistema linear resultante também são abordadas. Por fim, destaca-se a implementação das condições de contorno, que são impostas naturalmente na formulação, e o procedimento de evolução dos pontos de controle sobre a superfície da gota.

O código numérico desenvolvido foi testado e validado a partir de resultados bem conhecidos na literatura de mecânica dos fluidos. Primeiramente, aborda-se o escoamento entre placas planas e paralelas causado por gradiente de pressão. Nesse caso, o programa recupera bem diversos resultados qualitativos e quantitativos. O perfil de velocidade parabólico e desenvolvido imposto na entrada do canal é mantido praticamente constante ao longo do escoamento, por exemplo. Fenômenos clássicos como a conservação da massa e a queda linear de pressão no escoamento também são bem representados em termos quantitativos. Do ponto de vista numérico, mostra-se que os desvios cometidos nesses cálculos podem ser contidos pelo refinamento adequado da malha. O escoamento em torno de um cilindro também é explorado, e os resultados são apresentados para os campos de velocidade e pressão. Impondo-se um perfil de velocidade uniforme em todo contorno externo e a condição de não-deslizamento sobre a superfície do cilindro, verifica-se os altos gradientes de velocidade nas suas proximidades. Além disso, os resultados representam de forma coerente a posição dos pontos de máxima e mínima pressão (ou mínima e máxima velocidade). Por fim, o escoamento gerado por um cilindro girando em um meio fluido inicialmente em repouso também foi avaliado. Nesse caso, é claro o movimento de rotação das linhas de corrente, evidenciando a existência de vorticidade no escoamento. Verifica-se ainda que a vorticidade é muito intensa nas proximidades do corpo, sendo difundida pelo meio e caindo à medida que nos afastamos do cilindro por efeito da viscosidade do fluido.

Uma vez validado o método, deu-se continuidade no desenvolvimento do código para inclusão da gota ao escoamento implementado as soluções fundamentais adimensionais sobre o contorno da gota e o método de evolução de sua superfície. Foi definida uma geometria padrão ao canal para que as simulações fossem realizadas. Afim de maior controle sobre os resultados, foi feito um estudo de convergência e erro do método em função da discretização do contorno e refinamento do passo de tempo de evolução da gota, tomando como base o erro associado à vazão no escoamento, e o erro cometido no cálculo da área da gota. Constatou-se que o refinamento da malha gera uma grande diminuição no erro da vazão, mas é quase indiferente ao erro da área. Por outro lado, no refinamento do passo de tempo ocorre exatamente o oposto. Esses dois estudos

levaram a escolha de um fator de concentração de elementos $Ne = 7$, o qual apresenta erros por volta de 1,5% na vazão, e um passo de tempo $\Delta t = 0,01$ - gerando erros na área menores que 0,5%. Definidos esses dois parâmetros para a realização das simulações, foram estudadas as influências do número de capilaridade, razão de viscosidade e diâmetro da gota sobre o escoamento da mesma ao longo do canal. Com relação aos formatos apresentados pela gota, menores números de capilaridade tendem a fazer com que a gota mantenha-se na forma esférica original. Maiores razões de viscosidade geram uma resistência maior à deformação, resultando em gotas menos deformadas. O tamanho da gota também tem relação estreita com o seu formato, já que maiores diâmetros implicam em maiores deformações superficiais ao passar pela constrição. A pressão de bombeamento aumenta com pequenos números de capilaridade, grandes razões de viscosidades e grandes diâmetros da gota. A relação entre Ca^{-1} e $\Delta P/P^*$, assim como, λ e $\Delta P/P^*$ é aproximadamente linear e positiva, enquanto a e $\Delta P/P^*$ é aproximadamente quadrática e positiva.

Sendo assim, é possível concluir que o presente trabalho cumpre os objetivos propostos para o Projeto de Graduação. O problema proposto é abordado com alto grau de profundidade, desde sua motivação do ponto de vista prático até a metodologia para alcançar o estado da arte, incluindo todos os detalhes da formulação e modelagem matemática, e da metodologia de implementação do método numérico.

6.2 Trabalhos futuros

A partir dos resultados apresentados neste trabalho, uma ampla frente de estudos pode ser abordada. Alguns exemplos consistem em aprimorar a metodologia numérica utilizada, melhorando a precisão e robustez do código em relação a: estabilização da simulação; maior precisão no cálculo das curvaturas locais; correção das descontinuidades na superfície da gota. Com o desenvolvimento de um código mais robusto, pode-se abordar outros problemas relacionados ao escoamento de gotas, tais como a interação entre duas ou mais gotas dentro do escoamento, condições de coalescência entre gotas, presença de surfactantes na superfície da gota e modificações na equação constitutiva para o salto de tensões na interface. Tendo em vista que o estudo do caso bidimensional permite apenas análises qualitativas, pretende-se passar toda a formulação física presente neste trabalho e implementá-la em um código de Método dos Elementos de Contorno para o caso tridimensional. Essa ferramenta seria de grande valia para investigar esse tipo de escoamento, incluindo comparações com dados experimentais e teorias disponíveis na literatura.

Referências

- Abramovitz, M. & Stegun, I. A. (1964). *Handbook of Mathematical Functions*. Hardcover, 1 ed.
- Ahmad, M., Minhas, M. U., Sohail, M., Faisal, M., & Rashid, H. (2013). Comprehensive review on magnetic drug delivery systems: A novel approach for drug targeting. *Journal of Pharmacy and Alternative Medicine*, 2, 13–21.
- Alvarado, V. & Manrique, E. (2010). *Enhanced Oil Recovery: Field Planning and Development Strategies*. Elsevier, 1 ed.
- Aris, R. (1962). *Vectors, Tensors and the Basic Equations of Fluid Mechanics*. Dover Publications, INC., 1 ed.
- Barnes, H. A. & Hutton, J. F. (1989). *Rheology Series - Vol. I – An Introduction to Rheology*. Elsevier, 1 ed.
- Batchelor, G. K. (1967). *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge University Press, 3 ed.
- Batchelor, G. K. (1970). Stress system in a suspension of force-free particles. *Journal of Fluid Mechanics*, 41, 545–570.
- Bazhlekov, I. B., Anderson, P. D., & Meijer, H. E. H. (2004). Nonsingular Boundary Integral Method for deformable rops in viscous flows. *Physics of Fluids*, 16, 1064–1081.
- Bird, R. B., Armstrong, R. C., & Hassager, O. (1987). *Dynamics of Polymeric Liquids - Vol. I – Fluid Mechanics*. John Wiley & Sons, 2 ed.
- Brebbia, C. A. (1978). *The Boundary Element Method for Engineers*. Pentech Press.
- Brebbia, C. A. & Dominguez, J. (1992). *Boundary Elements: An Introductory Course*. Computational Mechanic Publications, 2 ed.
- Brenner, J. H. H. (1991). *Low Reynolds Number Hydrodynamics*. Kluwer Academic Publishes.
- Cristini, V., Blawdziewicz, J., & Loewenberg, M. (1998). Drop breakup in three-dimensional viscous flows. *Physics of Fluids*, 10, 1781–1783.
- Cristini, V., Blawdziewicz, J., & Loewenberg, M. (2001). An adaptive mesh algorithm for evolving surface: simulations of drop breakup and coalescence. *Journal of Computational Physics*, 168, 445–463.

- Cunha, F. R. (2003). Notas de aula do curso de Microhidrodinâmica do programa de pós-graduação em Ciências Mecânicas da Universidade de Brasília, UnB/DF-Brasil (material cedido pelo professor T. F. Oliveira, 2014).
- Davis, R. (1999). Buoyancy-driven viscous interaction of a rising drop with a smaller trailing drop. *Physics of Fluids*, 11, 1016–1028.
- Dhont, J. K. G. (1996). *An Introduction to Dynamics of Colloids*. Elsevier Science.
- Edwards, D., Brenner, H., & Wasan, T. D. (1991). *Interfacial Transport Processes and Rheology*. Butterworth-Heinemann.
- Einstein, A. (1956). *Brownian Movement*. Dover Publications, INC., republication of the original 1926 translation edition.
- Frankel, N. A. & Acrivos, A. (1970). The constitutive equation for a dilute emulsion. *Journal of Fluid Mechanics*, 44, 65–78.
- Kennedy, M., Pozrikidis, C., & Shalak, R. (1994). Motion and deformation of liquid drops, and the rheology of dilute emulsions in shear flow. *Computers & Fluids*, 23, 251–278.
- Khayat, R. E. (1998). Boundary-element analysis of planar drop deformation in confined flow. Part II: Viscoelastic fluids. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 22, 291–306.
- Khayat, R. E. (2000). A boundary-only approach to the deformation of a shear-thinning drop in extensional Newtonian flow. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 33, 559–581.
- Khayat, R. E., Huneaultb, M. A., Utrackib, L. A., & Duquetteb, R. (1998). A boundary element analysis of planar drop deformation in the screw channel of a mixing extruder. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 21, 155–168.
- Khayat, R. E., Luciani, A., & Utracki, L. A. (1997). Boundary-element analysis of planar drop deformation in confined flow. Part I: Newtonian fluids. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 19, 279–289.
- Khayat, R. E., Luciani, A., Utracki, L. A., Godbille, F., & Picot, J. (2000). Influence of shear and elongation on drop deformation in convergent divergent flows. *International Journal of Multiphase Flow*, 26, 17–44.
- Kim, S. & Karrila, S. J. (1991). *Microhydrodynamics - Principles and Selected Applications*. Butterworth-Heinemann.
- Kitagawa, K. (1990). *Boundary Element Analysis of Viscous Flow*. Springer-Verlag.
- Konyukhov, A. & Izi, R. (2015). *Introduction to Computational Contact Mechanics: A Geometrical Approach*. John Wiley & Sons.

- Kreyszig, E. (1999). *Advanced Engineering Mathematics*. John Wiley & Sons.
- Ladyzheskaya, O. A. (1969). *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow*. Gordon & Breach.
- Lamb, H. (1932). *Hydrodynamics*. Cambridge University Press, 6th ed. edition.
- Larson, R. G. (1999). *The Structure and Rheology of Complex Fluids*. Oxford University Press.
- Lee, J. & Pozrikidis, C. (2006). Effect of surfactants on the deformation of drops and bubbles in Navier-Stokes flow. *Computers & Fluids*, 35, 43–60.
- Loewenberg, M. & Hinch, E. J. (1996). Numerical simulations of a concentrated emulsion in shear flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 321, 395–419.
- Loewenberg, M. & Hinch, E. J. (1997). Collision of two deformable drops in shear flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 338, 299–315.
- Macosko, C. W. (1994). *Rheology - Principles, Measurements and Applications*. Wiley-VCH, 1 ed.
- Oliveira, T. F. (2007). *Microhidrodinâmica e Reologia de Emulsões*. Tese de Doutorado - PUC-Rio, RJ, Brasil.
- Oliveira, T. F. & Cunha, F. R. (2015). Emulsion rheology for steady and oscillatory shear flows at moderate and high viscosity ratio. *Rheologica Acta*, aceito para publicação, 1–56.
- Pournader, O. & Mortazavi, S. (2013). Three dimensional interaction of two drops driven by buoyancy. *Computers & Fluids*, 88, 543–556.
- Power, H. & Wrobel, L. C. (1996). *Boundary Integral Methods in Fluid Mechanics*. Computational Mechanic Publications.
- Pozrikidis, C. (1992). *Boundary Integral and Singularity Methods for Linearized Viscous Flow*. Cambridge University Press.
- Pozrikidis, C. (1993). On the transient motion of ordered suspensions of liquid drops. *Journal of Fluid Mechanics*, 246, 301–320.
- Pozrikidis, C. (2001). Three-dimensional oscillations of inviscid drops induced by surface tension. *Computers & Fluids*, 30, 417–444.
- Pozrikidis, C. (2012). Passage of a liquid drop through a bifurcation. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 36, 93–103.
- Roca, J. F. & Carvalho, M. S. (2013). Flow of a drop through a constricted microcapillary. *Computers & Fluids*, 87, 50–56.

- Schlichting, H. (1979). *Boundary-Layer Theory*. McGraw-Hill, INC.
- Siqueira, I. R., Rebouças, R. B., Oliveira, T. F., & Cunha, F. R. (2015). A new mesh relaxation approach for Boundary Integral Method simulations of drop deformation. *Computers & Fluids*, sob revisão, 1–34.
- Sjöblom, J. (1992). *Emulsions – A Fundamental Approach*. Kluwer Academic Publishes.
- Stone, H. A. & Leal, L. (1989). Relaxation and breakup of initially extended drop in an otherwise quiescent liquid. *Journal of Fluid Mechanics*, 198, 399–427.
- Stroud, A. H. & Secrest, D. (1966). *Gaussian Quadrature Formulas*. Prentice-Hall.
- Tanzosh, J., Manga, M., & Stone, H. A. (Boundary Element Technology). Boundary integral methods for viscous free-boundary problems: deformation of single and multiple fluid-fluid interfaces. 1992, 6, 19–39.
- Telles, J. C. F. (1987). A self adptive co-ordinate transformation for efficient numerical evaluation of general boundary element integrals. *Journal of Fluid Mechanics*, 24, 959–973.
- Wrobel, L. C., Júnior, D. S., & Bhaumik, C. L. (2009). Drop deformation in Stokes flow through converging channels. *Engeneering Analysis with Boundary Elements*, 33, 993–1000.
- Yan, L., Thompson, K. E., & Valsaraj, K. T. (2006). A numerical study on the coalescence of emulsion droplets in a constricted capillary tube. *Journal of Colloid and Interface Science*, 298, 832–844.
- Yon, S. & Pozrikidis, C. (1999). Deformation of a liquid drop adhering to a plane wall: significance of the drop viscosity and the effect of an insoluble surfactant. *Physics of Fluids*, 11, 1297–1308.
- Zapryanov, Z. & Tabakova, S. (1999). *Dynamics of Bubbles, Drops and Rigid Particles*. John Wiley & Sons.
- Zinchenko, A. Z., Rother, M. A., & Davis, R. H. (1997). A novel Boundary-Integral algorithm for viscous interaction of deformable drops. *Physics of Fluids*, 9, 1493–1511.
- Zinchenko, A. Z., Rother, M. A., & Davis, R. H. (1999). Cusping, capture, and breakup of interacting drops by a curvatureless boundary-integral algorithm. *Journal of Fluid Mechanics*, 39, 249–292.